EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH, DEVENTER
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK
Dr. G. C. GERRITS, AMSTERDAM
Dr. B. P. HAALMEIJER, AMSTERDAM
Dr. W. P. THIJSEN, BANDOENG
Dr. P. DE VAERE, BRUSSEL
Dr. D. P. A. VERRIJP, ARNHEM

8e JAARGANG 1931/32, Nr. 4

P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor inteekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken, verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt.* Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

De redactie heeft het genoegen in deze aflevering het portret te geven van Prof. Dr. M. VAN HAAFTEN; zij hoopt de portretten van al onze hoogleeraren den inteekenaars achtereenvolgens te kunnen aanbieden.

OVER TWEE VRAAGSTUKKEN UIT DE BESCHRIJVENDE MEETKUNDE [1])

DOOR

Hk. DE VRIES.

In het volgende wensch ik de aandacht van H.H. Docenten in de Beschrijvende Meetkunde aan inrichtingen van Middelbaar Onderwijs op twee vraagstukken te vestigen, die reeds bij de beginselen behandeld worden, doch ook later, bij voortgezette studie, steeds weer terugkeeren, en waarvan het dus van groot belang is, *dat de leerlingen van den beginne af aan de theoretisch beste en tevens practisch kortste, nauwkeurigste, en dus doeltreffendste oplossing leeren kennen*: ik bedoel de beide vraagstukken om, wanneer een vlakke figuur bepaald is door haar vlak en éene projectie, hieruit af te leiden 1° de ware gedaante, 2° de andere projectiën.

Jaarlijks aan het eind der maand September brengt mijn ambt mij in aanraking met jongelieden, die uit alle oorden des lands te Delft samenstroomen om hier o.a. theoretisch en practisch de Beschrijvende Meetkunde te bestudeeren, maar zelden of nooit geschiedt het, dat zij van de beide zooeven genoemde vraagstukken de m.i. beste oplossing geleerd hebben; daarom neem ik de vrijheid, deze oplos-

---

[1]) De Heer Wijdenes wenschte dat het hier volgende stukje, dat een 28 jaar geleden voor het eerst verschenen is in het „Wiskundig Tijdschrift" van den Heer F. J. Vaes, opnieuw gepubliceerd zou worden, en de Heer Vaes heeft hiertoe zijn toestemming gegeven, mits ook zijn „Naschrift" opnieuw opgenomen zou worden, aan welke voorwaarde hier voldaan is. De schrijver van toen heeft intusschen, als deskundige bij de eindexamens der H.B.S., overvloedig gelegenheid gehad te constateeren dat de invloed van zijn oorspronkelijk stukje vrijwel nihil geweest is; men cirkelt er nog altijd lustig op los, en construeert daarbij figuren waarbij de affiniteitsas meer op een slang dan op een rechte lijn gelijkt. Moge de hernieuwde publicatie méér effect sorteeren.

Amsterdam, Jan. 1932. De Schrijver.

Toen Prof. De Vries mijn artikel, getiteld: „De affiniteit bij het onderwijs in de beschrijvende meetkunde aan de h.b.s. met vijfjarige cursus" verschenen in de 7e jaargang van „Euclides", had gelezen, herinnerde hij zich, dat hij een kleine dertig jaar geleden er ook al over had geschreven; we hebben het artikel opgezocht en geven het hier onveranderd weer, behoudens enkele notaties en met nieuwe figuren.

P. W.

singen aan het oordeel der vakgenooten te onderwerpen in de hoop, dat dezen termen mogen vinden ze in hun onderwijs op te nemen.

Vraagstuk I. Een vlakke figuur F is bepaald door haar vlak α, en één harer projecties (bijv. de horizontale F_1); gevraagd de ware gedaante van F.

Is het vlak α door zijn beide doorgangen d_1, d_2 gegeven (Fig. 1), dan slaat men in den regel één der twee volgende wegen in. Men brengt een standvlak aan $\perp d_1$, en bepaalt de snijlijn van dit vlak met α. Door middel van rechten $/\!/ d_1$ brengt men de verschillende punten van F op deze snijlijn over, slaat daarna de op die snijlijn liggende punten door middel van een stel concentrische cirkels in het horizontale projectievlak neer, trekt door de neergeslagen punten opnieuw lijnen $/\!/ d_1$, en laat eindelijk uit de punten van F_1 de loodlijnen op die lijnen neer. (Zie Euclides Jg. VII, blz. 126, fig. 13). Wil men het standvlak vermijden, dan bezigt men den vertikalen doorgang d_2, brengt de punten van F door middel van dezelfde rechten $/\!/ d_1$ op dezen over, slaat hem daarna neer, en is dan verplicht een stel cirkels te teekenen om het gemeenschappelijk middelpunt 0.

Is nu de neergeslagen figuur F_n (waarvoor in den beginne doorgaans een veelhoek gekozen wordt) langs één van deze beide wegen geconstrueerd, dan noodig ik den teekenaar uit eens na te gaan of iedere zijde (of diagonaal) A_1B_1 van T_1 de bijbehoorende rechte van F_n wel juist in een punt D_1 van d_1 ontmoet (Fig. 1), terwijl ik hem tevens verzoek mij de oorzaak voor het bestaan dezer contrôle te willen aangeven. Dit laatste gelukt in den regel wel, doch slechts na eenig overleg, en waarbij ten duidelijkste blijkt, dat dit eenvoudige verband tusschen A_1B_1 en A_nB_n hem althans bij dit vraagstuk nooit is opgevallen; en wanneer nu de contrôle inderdaad wordt uitgevoerd, dan blijkt bijna zonder uitzondering dat de punten D_1 in losse bevalligheid om d_1 heen gegroepeerd liggen, terwijl slechts een zeer kleine minderheid er inderdaad op ligt; van de met het vlak neergeslagen rechten ligt zoo goed als geen enkele inderdaad in dat vlak! *Leert men hem nu een constructie, waarbij juist van deze vaste doorgangspunten gebruik wordt gemaakt, en die bovendien aanmerkelijk korter is* dan de beide voorgaande, dan is hij volgaarne bereid, de superioriteit dezer nieuwe oplossing te erkennen, maar.... indien zich over korter of langer tijd hetzelfde vraagstuk opnieuw voordoet, lost hij het op op de wijze,

zooals hij het op de H. B. S. heeft geleerd. Wat niet meer dan natuurlijk is. Daarom zou het wenschelijk zijn, dat dit vraagstuk van meet af aan op de volgende wijze werd opgelost (fig. 1).

Construeer van een punt van F, b.v. A, de vertikale projectie, en

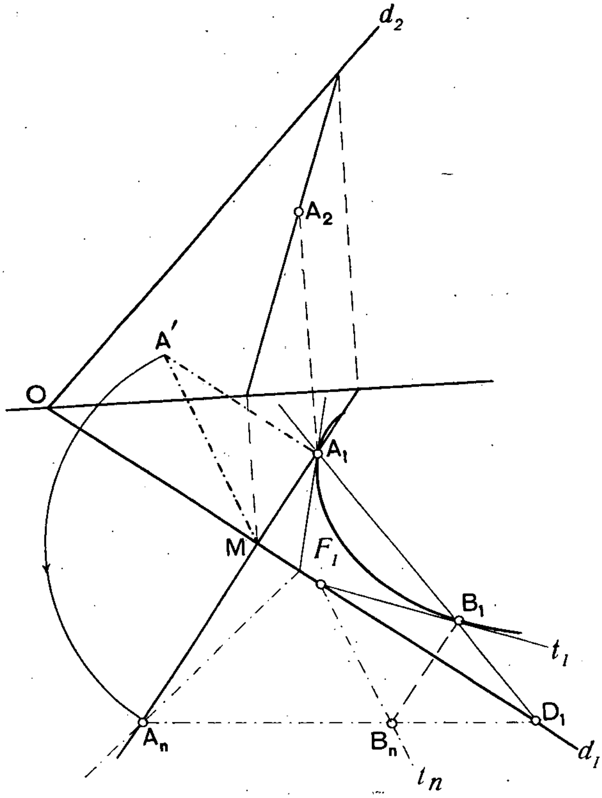


Fig. 1.

daarna met behulp van den rechthoekigen driehoek AA_1M, waarvan de eene rechthoekszijde A_1M gelijk is aan den afstand van A_1 tot d_1, de andere gelijk aan den afstand van A_2 tot de as van projectie, den straal van den cirkel, dien A bij wenteling van α om d_1 beschrijft; door dezen straal van M af op de genoemde loodlijn uit te zetten vindt men A_n. Trek nu een rechte A_1B_1 door A_1, en die F_1 in één of meer punten snijdt; verbind het punt D_1 dezer lijn met A_n, en laat uit B_1 de loodlijn neer op d_1; het snijpunt dezer loodlijn met A_nD_1 is B_n.

Is F een kromlijnige figuur, dan is het ten zeerste gewenscht van F_n niet alleen de punten doch ook de raaklijnen te construeeren; een matig aantal scherp bepaalde punten toch met de raaklijnen

is voor het nauwkeurig teekenen eener kromme van veel meer waarde dan een groot aantal punten zonder raaklijnen, temeer daar in den regel verscheidene dezer punten zich niet eens goedschiks in het beloop der kromme willen voegen; welnu, men heeft slechts de raaklijn in B_1 aan F_1 met d_1 te snijden en het snijpunt met B_n te verbinden (Fig. 1), om onmiddellijk de raaklijn in B_n aan F_n te vinden.

Lost men het vraagstuk op deze wijze op, dan komt ook het theoretisch verband tusschen F_1 en F_n tot zijn recht, en heeft men gelegenheid iets mede te deelen over de zoo belangrijke leer der Meetkundige Verwantschappen. Men kan dan opmerken, dat reeds in de Planimetrie enkele eenvoudige voorbeelden van meetkundige verwantschappen op den voorgrond treden, nl. de congruentie en de gelijkvormigheid, dat er echter ook andere vormen van meetkundige verwantschappen bestaan, en dat men daarvan een voorbeeld vindt in het verband tusschen F_1 en F_n. Deze figuren zijn in het algemeen noch congruent, noch gelijkvormig, doch zoogenaamd „orthogonaal affien", en deze verwantschap der „affiniteit" wordt gekenmerkt door de volgende beide eigenschappen.

1°. aan ieder punt der ééne figuur is één punt der andere toegevoegd, en de verbindingslijn van ieder paar toegevoegde punten is $\perp d_1$;

2°. aan iedere rechte der eene figuur is één rechte der andere toegevoegd, en het snijpunt van ieder paar toegevoegde rechten ligt op d_1.

De lijn d_1 is dan de zoogenaamde „affiniteitsas", A_1A_n enz. zijn de „affiniteitsstralen".

In het algemeen legt de nieuweling in onze teekenzaal vreeze en afschuw aan den dag voor vlakken, wier doorgangen hem ontglippen; toch leert hem de harde noodzakelijkheid aldra, dat hij het zonder zulke vlakken op den duur niet zal kunnen stellen, en met constructies, die op zulke vlakken betrekking hebben, dient hij zich vertrouwd te maken. Wat nu ons vraagstuk aangaat, de constructie blijft in dit geval nagenoeg onveranderd.

Laat in fig. 2 het vlak van F bepaald zijn door de beide rechten l en m, en laat ons aannemen, dat de doorgangen onbruikbaar zijn. Men slaat dan het vlak α om een hoofdlijn $h \,/\!/\, d_1$ neer, totdat het evenwijdig wordt aan het horizontale projectievlak, en projecteert daarna F_n op dit vlak, waardoor F'_n ontstaat. Men zal beginnen

met het punt S_n te bepalen (met behulp van den rechthoekigen driehoek, waarvan de eene rechthoekszijde S_1M, de tweede de hoogte van S_2 boven h_2 is), om daarna door S_1 rechten te trekken die F_1 snijden (waartoe dikwerf ook l_1 en m_1, zie B_1 en C_1, zelve zullen behooren), deze met h_1 te snijden, en de snijpunten met S_n

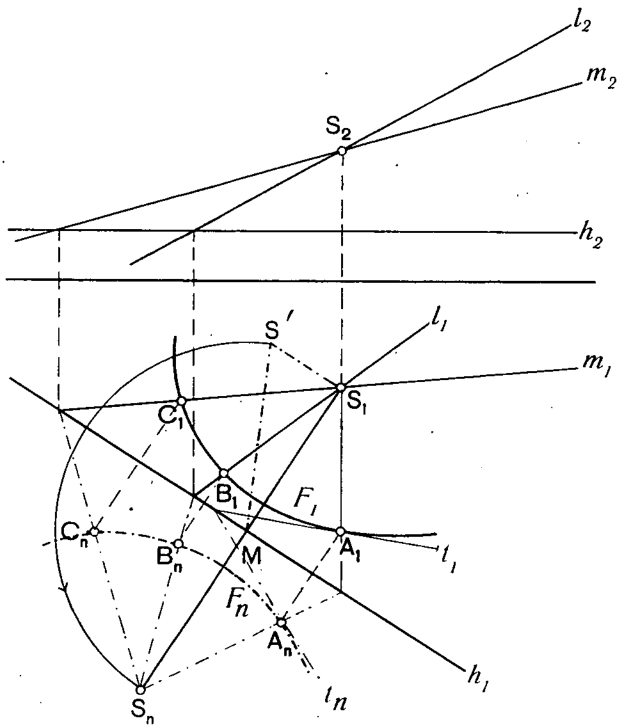


Fig. 2.

te verbinden. F_1 en F_n zijn dus opnieuw orthogonaal affiene figuren, doch de affiniteitsas is in dit geval h_1. Eindelijk zal het onnoodig zijn op te merken, dat alle voorafgaande beschouwingen evenzeer gelden voor de vertikale projectie van F en den vertikalen doorgang d_2 van α.

De orthogonale affiniteit is slechts een bijzonder geval van de meer algemeene affiniteit, waarbij de affiniteitsstralen wel is waar nog steeds evenwijdig, doch niet meer loodrecht op de affiniteitsas zijn; deze algemeene affiniteit nu is de verwantschap tusschen de beide projecties F_1 en F_2 van F. Dat aan ieder punt A_1 van F_1 één punt A_2 van F_2 is toegevoegd, en dat alle rechten $A_1 A_2$ onderling evenwijdig (nl. loodrecht op de as van projectie) zijn, is duidelijk;

en dat aan iedere rechte l_1 van F_1 één rechte l_2 van F_2 is toegevoegd, eveneens; doch niet van algemeene bekendheid schijnt het te zijn, dat het snijpunt van ieder paar toegevoegde rechten steeds op een vaste as gelegen is, die door het snijpunt der beide doorgangen van α gaat, en wier ligging overigens slechts afhangt van den stand van α in de ruimte.

Men komt tot de kennis dezer as langs den volgenden, uiterst eenvoudigen weg.

De beide projectievlakken verdeelen de ruimte in vier tweevlakshoeken. Noemen wij de as van projectie gemakshalve de X-as, en het vlak door deze as dat den 1en en 3en tweevlakshoek middendoor deelt, het halveeringsvlak M_1, dan is gemakkelijk in te zien, dat dit vlak de meetkundige plaats van alle punten der ruimte is, wier beide projecties, nadat de projectievlakken op de gebruikelijke wijze tot één vlak vereenigd zijn, elkaars spiegelbeeld zijn ten opzichte van de X-as; dit nu is, op zich zelf beschouwd, belangwekkend, doch voor de constructie van weinig beteekenis. Beschouwen wij daarentegen het vlak M_2, dat den tweeden en vierden tweevlakshoek middendoordeelt, dan is dit de meetkundige plaats van alle punten der ruimte, wier beide projecties samenvallen; en deze eigenschap nu is het die, behoorlijk geëxploiteerd, tot de ontdekking leidt dat F_1 en F_2 twee affiene figuren zijn.

Er volgt in de eerste plaats uit, dat het allereenvoudigste vraagstuk der Beschrijvende Meetkunde dit is: een rechte l met het vlak M_2, te snijden; want de beide samenvallende projecties van dit snijpunt kunnen natuurlijk nergens anders liggen dan in het snijpunt van l_1 en l_2; maar er volgt verder uit, dat in ieder vlak α een rechte s_{12} gelegen is (nl. de snijlijn met M_2), die de eigenschap heeft, dat al haar punten samenvallende projecties hebben, zoodat zij zelve natuurlijk eveneens samenvallende projecties heeft; zij gaat klaarblijkelijk door het snijpunt O van de doorgangen van α, en is dus door nog één enkel ander punt bepaald. Nu ligt natuurlijk het snijpunt van iedere willekeurige rechte l van α met M_2 op s_{12}; geven wij dus aan de beide samenvallende projecties dezer rechte de notatie s_{12}, dan vinden wij: de beide projecties van alle rechten l van α snijden elkaar op s_{12}, waarmede in verband met het voorgaande bewezen is dat F_1 en F_2 twee affiene figuren zijn; de affiniteitsas s_{12} staat echter in den regel niet meer loodrecht op de richting der affiniteitsstralen.

De vraag is nu, hoe men van deze affiniteitsas van een vlak α bij de constructie gebruik maakt; dit wordt geïllustreerd door fig. 3, waarbij wij onderstellen, dat α door zijn doorgangen bepaald is. Bepaal van een punt A_1 van F_1 de vertikale projectie door middel van de door A gaande en in α liggende hoofdlijn h; men vindt dan

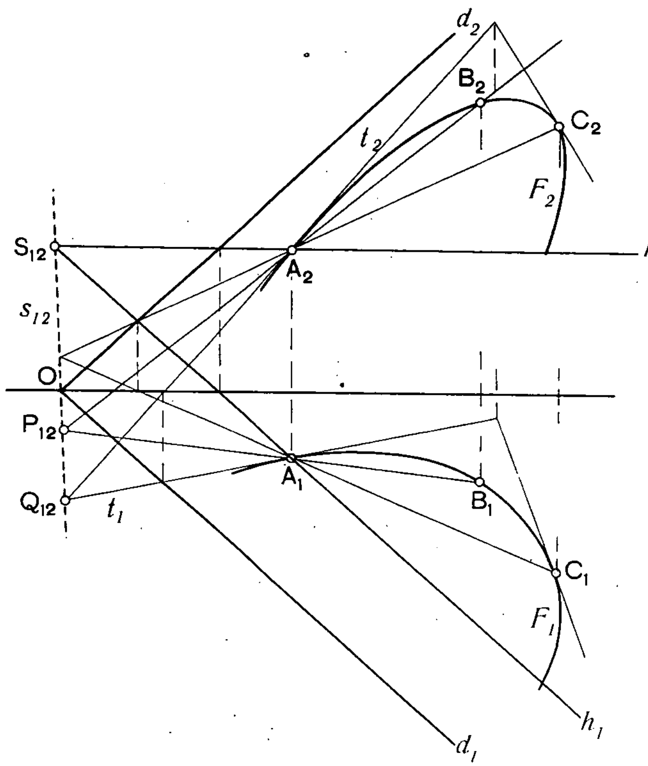


Fig. 3.

niet slechts het punt A_2, doch in de verbindingslijn van O met het snijpunt S_{12} van de beide projecties van h tevens de affiniteitsas s_{12}; en alle overige punten B_2 van F_2 worden nu bepaald door B_1 met A_1 te verbinden, de verbindingslijn met de affiniteitsas te snijden, het snijpunt P_{12} met A_2 te verbinden, en B_1 loodrecht op te halen. De raaklijn in A_2 snijdt die in A_1 op de affiniteitsas in Q_{12}; kan men dus die in A_1 trekken, dan is ook de andere bekend. De raaklijn in C_1 ligt in onze figuur te ongunstig om met de affiniteitsas gesneden te worden; men snijde haar daarom met die in A_1, en hale het snijpunt op. Ook aan contrôle ontbreekt het geenszins; het snijpunt van A_1C_1 met de X-as, en dat van A_2C_2

met d_2 liggen op een vertikale lijn; evenzoo dat van de raaklijn in A_1 met d_1 met dat van de raaklijn in A_2 met de X-as; enz.

In fig. 4 is aangenomen dat het vlak α bepaald is door twee elkaar snijdende rechten l en m; in plaats van ingewikkelder wordt nu de constructie eenvoudiger, want men heeft slechts de snij-

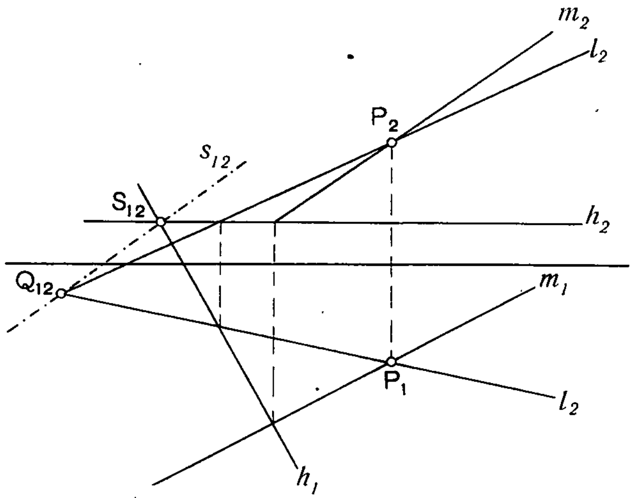


Fig. 4.

punten van l_1 en l_2, m_1 en m_2 met elkaar te verbinden, om onmiddellijk de affiniteitsas s_{12} te vinden.

Daarbij is in de figuur met opzet aangenomen, dat één van die twee punten, nl. het tweede, ongunstig ligt; in plaats van m bezigt men dan een andere rechte h van α (liefst een eerste hoofdlijn, zoodat men eerst h_2 // de as teekent), en desgelijks indien l niet te gebruiken is. Slechts indien de affiniteitsas zelve buiten het blad valt, moet men zijn toevlucht tot andere middelen nemen.

Het groote belang van het vlak M_2 voor de constructie is het eerst ingezien door W. Fiedler (vgl. zijn „Darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage", 3e Aufl. Bd. I, pp. 263 en 365).

In het artikel volgt verder een korte beschrijving van de deelvlakken op de assen OY en OZ en van de affiniteit, die er bestaat tusschen de tweede en derde projecties. Daarna als slot:

Met uitzondering van wat hier is medegedeeld over het derde projectievlak en de daarmede optredende vier nieuwe deelvlakken, zijn de voorgaande beschouwingen geheel van elementairen aard, en voor leerlingen uit de hoogste klassen der H. B. S. alleszins

bevattelijk; ik heb trouwens gedurende drie achtereenvolgende jaren gelegenheid gehad mij hiervan te overtuigen.

Naschrift van F. J. Vaes.

Bij het neerslaan van vlakke figuren komt de rechte lijn het eerst in aanmerking, en zeer zeker zal iedereen daarbij de snijpunten met de projectievlakken gebruiken. Met de zijden van een driehoek gaat dat ook nog, maar neem nu een zeshoek. Scherpe snijding, snijpunten van lijnen buiten de grenzen der teekening, een geharrewar van lijnen, dat voor de meeste leerlingen niet te overzien is. Ongetwijfeld is het zeer nuttig om op den samenhang te wijzen, en het gebruik van de doorsnede van het gegeven vlak met het deelvlak van het 2e en 4e kwadrant is zeer fraai, en zal ook op leerlingen, die gevoel voor wiskunde hebben, zeker wel indruk maken, maar voor de meesten is het door elkander loopen van lijnen een groot bezwaar.

Zoo spoedig mogelijk gaat Schr. dan ook over tot de constructie van den standhoek (die toch ook bij de affiniteitsconstructie gebruikt wordt), met de twee bundels lijnen evenwijdig aan den horizontalen doorgang, den bundel loodrecht daarop, en de concentrische cirkels. De teekeningen krijgen dan een rustiger aanzien, en de duidelijkheid wint in hooge mate. Scherpe snijding is geheel uitgesloten (tenzij de standhoek met het horizontale vlak weinig van 90° verschilt), en de evenwijdige lijnen en cirkels zijn veel spoediger op papier gezet, dan de verlengden der zijden van den veelhoek.

Ter contrôle kan men nu de snijpunten aanstippen, waar de zijden of diagonalen van den veelhoek den hor. doorgang snijden, voor zoover ze dat binnen de grenzen der teekening doen, en zien of de neergeslagen lijnen er door gaan. Daardoor is dan m.i. de maximum nauwkeurigheid bereikt.

Met affiniteit alleen werken kan zeer verkeerde figuren geven. Immers een kleine fout in het bepalen van het eerste punt kan de figuur onjuist maken, omdat men dan feitelijk de doorsnee van het prisma op de horizontale projectie met een ander vlak dan het bedoelde verkrijgt. Een kleine fout in de richting van de eerst neergeslagen lijn, kan andere punten geheel van hun plaats brengen; en met een beetje goeden wil kunnen dan toch de overeenkomstige stralen tot snijding op de affiniteitsas gebracht worden; door een onmerkbare draaiing van een verlengde, kan het snijpunt

gemakkelijk eenige millimeters worden verplaatst. Bij evenwijdige lijnen kunnen zeer zeker ook fouten worden gemaakt, doch knoeierij van leerlingen is uitgesloten, als te spoedig in het oog vallend. Bovendien hebben die evenwijdige lijnen zeer veel waarde voor projecteeren van een figuur of lichaam op een scheefstaand vlak. De „benaderingsmeetkunde" zou hier een uitstekend terrein voor toepassing vinden.

Tot zoover het naschrift van den Heer Vaes; in een brief van 18 Jan. 1932 worden dezelfde argumenten nog eens onderstreept: *„dertig jaar ervaring als lijnteekenleeraar spreken mede"*. Het dacht mij daarom niet kwaad om den lezers te laten zien, wat de Heer Vaes met het bovenstaande bedoelt en kan dus niet beter doen dan van een paar figuren uit zijn eigen boek een cliché op dezelfde grootte te laten maken en hier op te nemen.

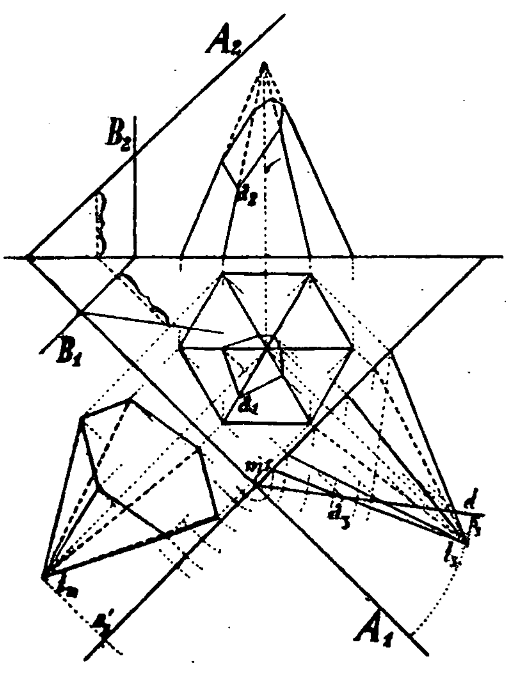


Fig. 32.

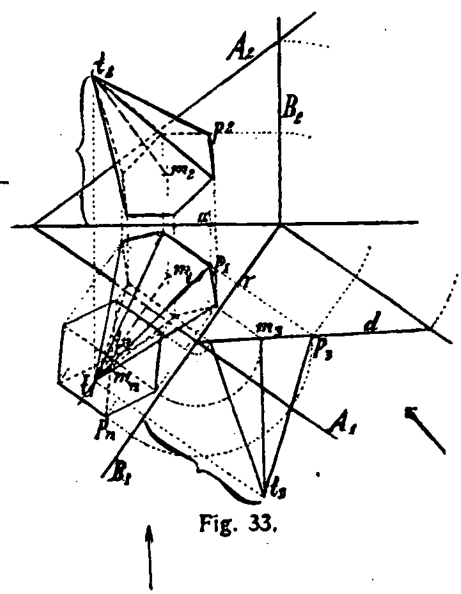


Fig. 33.

Fig. 32 en 33 uit het tweede deel van de Hoofdzaken van de Beschrijvende Meetkunde door Ir. F. J. Vaes w. i. (14 blz. 50 ct.).

Tot mijn spijt moet ik zeggen, dat noch de manier, noch de uitwerking mij, hoewel slechts een amateur in het teekenvak, kunnen bekoren. P. W.

HISTORISCHE REVUE

DOOR

E. J. DIJKSTERHUIS.

Alvorens het overzicht van de in den laatsten tijd verschenen werken voort te zetten, vermelden we hier enkele uitgaven op het gebied van de geschiedenis der wis- en natuurkunde, die al van ouderen datum zijn, maar die door de uitgevers alsnog ter bespreking zijn ingezonden.

Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Bücherei. Verlag Otto Salle. Berlin.

Band 1. *F. Kliem und G. Wolff, Archimedes.* 1927. 142 blz.

Hierin wordt na een inleiding over de ontwikkeling van de Grieksche Wiskunde voor Archimedes (voornamelijk handelend over de drie klassieke problemen en de z.g. exhaustiemethode, zooals ze bij Euclides wordt toegepast) en een korte schets van zijn leven een overzicht gegeven van zijn technisch, mechanisch en mathematisch werk. De daarbij in acht genomen volgorde: Statica, Hydrostatica, Arithmetica, Geometrie is niet de traditioneele, maar leent zich beter dan deze voor inleiding in het gecompliceerde geheel van zijn verhandelingen.

In verband met den geringen omvang van het werkje moet natuurlijk worden volstaan met overzichten van den inhoud der besproken geschriften, die door voorbeelden van de behandeling worden aangevuld. Op de nog bestaande geschilpunten wordt niet ingegaan.

Voor eerste kennismaking met het werk van den steeds weer even verwonderlijken Helleen kan het werkje zeer zeker worden aanbevolen.

Band 4. *A. Wenzel, Galilei.* 1927. 74 blz.

De schrijver behandelt na een historische inleiding achtereenvolgens de astromische opvattingen en ontdekkingen van Galilei en den daardoor veroorzaakten strijd met de R. K. Kerk, zijn onderzoekingen op het gebied van val, worp en slingerbeweging en zijn werk op het gebied der statica. De uiteenzetting is zeer populair en, wat erger is, nogal erg oppervlakkig. Kritiek op onjuiste of halfjuiste beweringen, die de schrijver zich veroorlooft, zou meer plaatsruimte eischen, dan de waarde van het boekje zou wettigen. Wie Galilei wil leeren kennen, zal nog steeds het beste doen, zijn eigen werken te lezen. Er zijn weinig schrijvers in de geschiedenis van de Wis- en Natuurkunde, waarbij men de traditioneele meeningen zoozeer als bij hem moet wantrouwen.

Band 7. *E. Hoppe, Otto von Guericke. 1927.* 65 blz.

De leeraar in Natuurkunde, die behoefte heeft aan historische verlevendiging van zijn traditioneele leerstof, zal in dit boekje een zeer bruikbare, door tal van goede illustraties verluchte behandeling van den persoon en het werk van den uitvinder der luchtpomp en constructeur van de befaamde Maagdeburger Halve Bollen vinden. Ook wie reeds het door F. Dannemann bewerkte deeltje uit *Ostwald's Klassiker* (no. 59) bezit, zal het met vrucht raadplegen; daar vindt men namelijk alleen een vertaling van het derde boek van de *Experimenta Nova;* Hoppe daarentegen bericht ook over publicaties over vindingen van Guericke, die reeds vroeger bij anderen verschenen waren en over den inhoud van de andere boeken; bovendien geeft hij belangrijke biographische bijzonderheden.

Band 8. *K. Fladt, Euklid.* 1927. 72 blz.

De leider van het in staat van wording verkeerende werk *Elementargeometrie,* dat een belangrijk hulpmiddel voor den wiskundedocent belooft te worden, geeft in dit deeltje als een soort van inleiding tot zijn grootere werk een beknopt overzicht van den inhoud van de *Elementen* van Euclides. Het doel van zijn zeer compact, hier en daar zelfs in telegramstijl gestelde geschrift is, zooals de auteur uitdrukkelijk zegt, niet de Lectuur van de *Elementen* overbodig te maken maar integendeel daartoe op te wekken. Als compendium van den rijken inhoud daarvan zal het steeds practische waarde behouden.

Band 13. *F. Kliem, Apollonius.* 1927. 75 blz.

Het is misschien wel wat pessimistisch, wanneer de schrijver in zijn voorbericht meent, dat de naam van Apollonius tot ver in de kringen der mathematici slechts bekend zal zijn in verband met den Apollonischen cirkel en de Apollonische raakproblemen; hij zal echter geen ongelijk hebben met zijn bewering, dat er in ieder geval velen zullen zijn, die de *Konika,* een van de wonderen der Oudheid, nooit hebben ingezien en er dus geen vermoeden van hebben, hoe een Grieksche mathematicus het kunststuk verrichtte, om met de betrekkelijk primitieve hulpmiddelen van zijn tijd de leer der kegelsneden tot op groote hoogte te ontwikkelen. Wie zich daarover een denkbeeld vormen wil, zonder dadelijk tot de oorspronkelijke bron te gaan, vindt in dit werkje een betrouwbare en bevattelijke inleiding.

F. Dannemann, Vom Werden der naturwissenschaftlichen Probleme. Grundriss einer Geschichte der Naturwissenschaften. Leipzig. W. Engelmann. 1928. XII en 376 blz.

Ook in ons land zal ongetwijfeld het groote werk van denzelfden schrijver *Die Naturwissenschaften in ihrer Entwicklung und ihrem Zusammenhang dargestellt* algemeen bekend en als eerste inleiding tot een algemeen overzicht van de kennis der geschiedenis van de natuurwetenschappen gewaardeerd zijn. Van dit werk is het boven aangekondigde een korte samenvatting in een deel, daardoor natuurlijk zeer beknopt, maar bruikbaar, wanneer men in kort bestek een

of andere periode van de geschiedenis wil overzien. Te samen met het bronnenwerk *Aus der Werkstatt grosser Forscher* van denzelfden schrijver is het zeer aan te bevelen aan docenten in de natuurwetenschappen.

We vermelden thans de volgende werken uit de jaren 1930 of 1931.

James Clerk Maxwell. A Commemoration Volume. 1831—1931. Essays bij J. J. Thomson, Planck, Einstein, Larmor, Jeans, Garnett, Fleming, Lodge, Glazebrook, Lamb. Cambridge University Press. 1931. 146 blz. 6 sh.

Het Maxwell-jubileum, dat in het najaar van 1931 gevierd is, heeft in veel mindere mate de publieke aandacht getrokken dan de daaraan voorafgaande herdenking van Faraday's ontdekking der electromagnetische inductie. Dit is geen wonder: het vinden van nieuwe feiten spreekt veel meer tot de phantasie der massa dan de opbouw van een theorie, die de geestelijke beheersching der gevonden feiten mogelijk maakt, al zit er in het voorspellen op theoretische gronden van een belangrijk natuurverschijnsel, dat dan later werkelijk blijkt te bestaan (i.c. de electromagnetische golven) toch ook een element, dat ieders verbeelding kan prikkelen. Bovendien mist Maxwell's kort en rustig geleerdenbestaan de romantische trekken, die voor Faraday tot ver buiten de kringen der natuurwetenschappelijk geïnteresseerden belangstelling konden wekken.

Wat de nagedachtenis van Maxwell aldus aan wereldsche waardeering gemist heeft, zal haar ruimschoots vergoed zijn door de gevoelens, waarmee alle beoefenaren der physica in het herdenkingsjaar van zijn geboorte aan den eigenlijken grondlegger van de mathematische electriciteitstheorie en daarmee van een groot gedeelte der tegenwoordige natuurwetenschappen zullen hebben gedacht. Van die gevoelens getuigt het bovenvermelde werkje, waarin tien physici, waaronder enkelen van de allergrootsten, hun denkbeelden over zijn historische beteekenis of hun herinneringen aan zijn persoon meedeelen. Het meest uitvoerig is het stuk van J. J. Thomson, waarin ook over Maxwell's leven bericht wordt; Planck schrijft over zijn invloed in Duitschland (vooral op Boltzmann); Einstein schetst de groote en vruchtbare verandering, die zijn optreden in ons begrip van de physische realiteit heeft gebracht,

doordat hij het continue veld naast of inplaats van het materiedeeltje heeft leeren stellen; Jeans handelt over het wezen van zijn wetenschappelijke methode.

Het werkje is verlucht met twee portretten.

Gino Loria, Storia delle Matematiche. Volume II. I secoli XVI *e* XVII. S. T. E. N. Torino. 1931. 595 blz. L. 25

Het tweede deel van deze nieuwste algemeene geschiedenis der wiskunde vervult ten volle alle gunstige verwachtingen, die de lectuur van het eerste (in deze Revue besproken; Euclides VI, 125) had opgewekt. De zeer belezen schrijver met zijn uitmuntenden stijl, zijn ruimen blik en zijn bezadigd oordeel is wel de aangewezen man voor een dergelijk werk, waarvan het soort altijd bedreigd wordt door het gevaar van wiskundige oppervlakkigheid als gevolg van een streven naar encyclopaedische volledigheid. Van die fout is hier geen sprake. De schrijver ziet er bewust van af, om van zijn boek een register te maken van alle mathematici, die in de 16e en 17e eeuw hebben geleefd en hij laat zich leiden door het wijze woord van Montucla: *„L'histoire d'une science n'est pas celle de tous les auteurs, qui en ont écrit, mais seulement de ceux, qui ont contribué par leurs travaux à en reculer les bornes: L'enumération exacte est l'ouvrage du bibliographe, non de l'historien."*

In de eerste twee hoofdstukken wordt de ontwikkeling van de z.g. *Algebra syncopata* (d. i. de half-symbolische algebra, waarin al wel teekens bestaan voor de opvolgende machten van de onbekende, maar waarin de vergelijkingen nog altijd met getallencoëfficienten worden geschreven) in Italië en ten Noorden van de Alpen behandeld. De 16e eeuw ondergaat dan verder den invloed van de Grieksche wiskunde door het verschijnen van edities en vertalingen van de klassieke schrijvers en draagt door de berekening van goniometrische tafelwerken en door het werk van mannen als Vieta en Snellius sterk bij tot de ontwikkeling van de trigonometrie. Dan volgt de 17e eeuw, *il secolo glorioso*; bij de behandeling hiervan wordt veel aandacht gewijd aan Galilei en zijn volgelingen en aan het ontluiken van de moderne wiskunde in het werk van Descartes en Fermat. Met Gregorius a Sancto Vincentio, Wallis, Barrow e. t. q. zet het voorspel van de Infinitesimaalrekening in; vanuit dat gezichtspunt beschouwd, kan het wiskundige werk van Huygens

als Intermezzo worden betiteld; daarna komt voorgoed de groote omwenteling in het wiskundig denken, als Newton en Leibniz de differentiaal- en integraalrekening ontwikkelen. Beiden worden met hun volgelingen en aanhangers uitvoerig besproken, terwijl ten slotte met het verhaal van *la grande contesa* (de strijd om de prioriteit van de ontdekking der infinitesimaalrekening) het deel besloten wordt. Er is alle aanleiding thans met spanning het derde deel, dat het werk zal voltooien, tegemoet te zien.

Umberto Forti, Introduzione storica alla lettura del Dialogo sui Massimi Sistemi di Galileo Galilei. Per la Storia e la Filosofia delle Matematiche. No. 9. Bologna. N. Zanichelli. 1931. 208 blz. L. 25.

In het jaar 1932 zal het driehonderd jaar geleden zijn, dat de beroemde dialoog van Galilei verscheen, die aanleiding heeft gegeven tot het veelbesproken proces, dat de Inquisitie hem aandeed wegens overtreding van het in 1616 aan hem uitgevaardigde verbod, de leer van Coppernicus voor waar te houden en haar anders dan bij wijze van hypothese te behandelen en te verdedigen. Het is niet onwaarschijnlijk, dat in dat jaar veler belangstelling meer dan gewoonlijk naar het historisch belangrijke en literair aantrekkelijke werk zal uitgaan, maar het is tevens vrijwel zeker, dat de onvoorbereide lectuur daarvan dan wel eens teleurstelling zal brengen. Men verwacht onwillekeurig in den „Dialoog over de twee grootste wereldsystemen, het Ptolemaeische en het Copernicaansche", zooals de volledige titel luidt, een uitvoerige uiteenzetting van de beide groote stelsels en een kritische analyse van beider verdiensten en zwakheden; die verwachting wordt echter niet in het minst bevredigd. De schrijver onderstelt de geheele astronomie van zijn tijd bekend en gaat onmiddellijk over tot de behandeling van speciale kwesties, waarbij polemieken tegen tijdgenooten een belangrijke plaats innemen. Dat brengt voor den modernen lezer eigenaardige moeilijkheden met zich mee; zijn kennis van de tegenwoordige astronomie stelt hem nog niet in staat, ook zeventiendeeeuwsche beschouwingen op dit gebied geheel te volgen en de kennisname van polemische discussies eischt in nog sterkere mate vertrouwdheid met den stand van het wetenschappelijk onderzoek in de toenmalige phase.

Aan al zulke bezwaren wil nu het boven aangekondigde boek

van Forti tegemoet komen. Het vormt, zooals de titel duidelijk doet uitkomen, een inleiding tot de lectuur van den Dialoog en het heeft niet de bedoeling, die lectuur te vervangen. Er worden wel talrijke fragmenten letterlijk meegedeeld, om zoodoende den lust, het werk zelf ter hand te nemen, te prikkelen, maar de hoofdzaak blijven toch de historische inleidingen, de tusschen de meegedeelde passages ingelaschte commentaren en de schetsen van de historische ontwikkeling der behandelde gebieden na Galilei.

Het werk van Forti vormt het negende deel van de bekende serie *Per la Storia e la Filosofia delle Matematiche,* welker gestadige groei opnieuw de bekende belangstelling bewijst, die de Italiaansche wis- en natuurkundigen in de historie hunner wetenschappen stellen. Merkwaardig is daarbij, dat het Instituto Nazionale per la Storia delle Scienze, dat de serie onder zijn auspiciën heeft, financieel wordt gesteund door het Nationale Instituut van Verzekeringen en door twee groote bankinstellingen. Een dergelijke belangstelling en actieve medewerking van commercieele lichamen in zuiver-wetenschappelijke ondernemingen kan men zich in ons land nog steeds moeilijk voorstellen.

Isabel Leavensworth, The Physics of Pascal. Publications of the Institute of French Studies, Inc. New York. 1930. 164 blz.

De schrijfster van dit werk, van oordeel, dat de groote aandacht, die er steeds aan het religieuse leven van Pascal en aan zijn literaire werkzaamheid is besteed, de belangstelling voor zijn merkwaardig en voortreffelijk werk op het gebied van wis- en natuurkunde eenigszins heeft verdrongen, geeft hier een bijdrage tot een meer algemeenen blik op de veelzijdige persoonlijkheid van den grooten Franschman door een critische analyse te leveren van zijn physische onderzoekingen.

Het gaat daarbij natuurlijk in hoofdzaak om twee onderwerpen: hydrostatica en aërostatica. Het eerste wordt behandeld in het klassieke *Traité de l'Equilibre des Liqueurs,* waarin de schrijver al het verspreide materiaal, dat op dit gebied reeds door Benedetti, Stevin, Galilei en Mersenne was verzameld, ordent tot een volkomen doorzichtig systeem, dat in logisch verband wordt gebracht met de principes der statica en daardoor in de algemeene mechanica wordt ingepast. Over aërostatica handelen de *Experiences Nouvelles touchant le Vuïde* en het *Traité de la pesanteur de la masse*

de l'air, in welke laatste verhandeling de opvattingen over den luchtdruk eerst tot volkomen klaarheid zijn gekomen.

De juiste waardeering voor deze werken is uit den aard der zaak pas te verkrijgen, wanneer men zich verplaatst in de wetenschappelijke spheer van het begin der 17e eeuw. Terecht schetst de schrijfster daarom uitvoerig den historischen achtergrond, waartegen men Pascal's werk moet zien. Het is niet onmogelijk, dat bij de lectuur daarvan verrassingen zullen optreden voor menigen modernen lezer, die gewend is, de 17e-eeuwsche physica te beoordeelen naar wat er in de tegenwoordige physica van hare resultaten is blijven voortbestaan en die door het grootendeels elementaire karakter, dat die resultaten thans vertoonen, licht verleid wordt tot onderschatting van de groote moeilijkheden, die hun verwerving heeft gekost. Zoo is men tegenwoordig geneigd, de proef van Torricelli als de definitieve weerlegging van de theorie van den horror vacui te beschouwen en de verklaring van den luchtdruk uit het gewicht van de hooger gelegen luchtlagen vanzelfsprekend te vinden. Het is dan wel merkwaardig, te zien, hoe Pascal, wanneer hij in 1647 van de Italiaansche proef met een kwikzuil in een aan een zijde gesloten buis hoort (dat ze van Torricelli afkomstig is, is hem dan nog onbekend) en haar door eigen waarneming bevestigd vindt, als eerste conclusie uit zijn talrijke experimenten, deze *maxime* opstelt: „*Que tous les corps ont repugnance à se separer l'un de l'autre, et admettre ce vuide apparent dans leur intervalle; c'est-à-dire, que la Nature abhorre ce vuide apparent*", terwijl hij de volgende *maximes* nader de kracht bepaalt, die in staat is, deze begrensde horror te overwinnen. Leerzaam is het ook, op te merken, hoe b.v. Galilei, die overtuigd was, dat de lucht gewicht had, niettemin nooit op het denkbeeld is gekomen, dat de atmospherische druk de oorzaak zou kunnen zijn van al de verschijnselen, die men gewoonlijk aan horror vacui toeschreef. En wanneer men meenen mocht, dat de proef van Torricelli wel nooit anders dan door de aanname van een luchtdruk zal zijn verklaard, kan men zich tot nadenken gestemd voelen, wanneer men haar door Descartes ziet toeschrijven aan een kringloop van kwik, lucht en aether (het vallende kwik verdringt een luchtkolom tot in de aetherspheer; vandaar daalt aether neer, om de plaats van het kwik in de buis in te nemen; in de buis is dus ook geen vacuum, wat geen wonder is, want een vacuum is onmogelijk, omdat het wezen van de materie

in haar uitgebreidheid bestaat, zoodat, waar ruimte is, ook materie moet zijn; het kwik daalt zoo lang als zijn gewicht voldoende kracht heeft om al de lucht, die er tusschen het kwikoppervlak en den hemel is, op te heffen). En hier zijn dan toch drie namen genoemd, die onder de besten van hun eeuw mogen worden gerekend!

Werkjes als dit, waarin de fundamenteele physische begripsvorming historisch wordt belicht, moeten van groote waarde worden geacht voor elken physicus en a fortiori voor ieder, die aanvangsonderwijs in physica heeft te geven. Het „steeds vernieuwde jongere geslacht" is van nature geneigd, de historische dwaalwegen te bewandelen; het is noodzakelijk, dat hun leiders op die wegen thuis zijn.

Thomas L. Heath, A Manual of Greek Mathematics. Oxford. At the Clarendon Press. 1931. 552 blz. 15 sh.

Sedert 1921 vormt het standaardwerk van Heath *A History of Greek Mathematics* (Oxford, Clarendon Press; 2 vol. 63 sh.) een hoogst betrouwbare bron van kennis der Grieksche Wiskunde in al haar vertakkingen. Zooals niet zelden geschiedt, staan echter ook bij dit werk de omvang en de prijs de algemeene verspreiding en daardoor de verdiende waardeering in den weg. Het is daarom een goede gedachte van den schrijver geweest, een kortere editie in één deel uit te geven, die natuurlijk niet meer antwoord geeft op alle denkbare vragen, die men inzake de wiskunde der Grieken stellen kan, maar waaruit men toch nog heel veel kan leeren over de mathematische praestaties, die de trots van het klassieke Hellas zijn. De schrijver heeft van de nieuwe uitgave gebruik gemaakt, om zijn beschouwingen over Aegyptische en Babylonische wiskunde, die sedert 1921 natuurlijk sterk verouderd waren geworden, aan de tegenwoordige inzichten op dit gebied aan te passen. Het hoofdstuk over Archimedes is verrijkt met een aan een Arabische vertaling van Thâbit b. Qurra ontleende behandeling van het probleem, in een cirkel een regelmatigen zevenhoek te beschrijven.

Het werk wordt besloten door twee uitvoerige, met zorg bewerkte registers.

K. G. Hagstroem. Sagan om de tio tecknen. Stockholm. Albert Bonniers Förlag. 1931. 147 blz. Kr. 5.75.

Dit boeiende, met 34 afbeeldingen prachtig geïllustreerde werkje

is in het Zweedsch geschreven en zal dus in ons land wel betrekkelijk weinig lezers vinden. Dit is zeer te betreuren, want het is belangwekkend van inhoud en sympathiek van strekking. Het wil op een wijze, die ook voor niet-wiskundigen volkomen duidelijk zal zijn, overtuigen van de humanistische waarde der mathesis; de schrijver heeft vaak met misnoegen vastgesteld, dat overigens wel ontwikkelde menschen niet alleen openlijk verklaren, van wiskunde geen begrip te hebben, maar dat ze zich hierop zelfs bijna beroemen, als wilden ze demonstreeren, dat zulk een „technische vaardigheid" of zulk een „hersengymnastiek" ver beneden het peil van hun philosophische, aesthetische of literaire belangstelling ligt. Hij wil nu aan een voorbeeld laten zien, wat wiskundig denken en wiskundig scheppen eigenlijk is en hij kiest daartoe een onderwerp, waarvan de cultuurhistorische beteekenis al evenmin kan worden ontkend als de practische waarde: de vorming van de cijfersystemen, bekroond door de niet genoeg te bewonderen vondst van het Indo-Arabische positiestelsel, van welks vernuft de Westersche beschaving sedert eeuwen, maar gewoonlijk zonder bewustheid, de voordeelen geniet.

Het werkje draagt den naam „Sage der tien teekens". De schrijver wil hiermee uitdrukken, dat het onderwerp zich zoozeer in de nevelen der historie verliest dat de scheppende fantasie vaak te hulp moet komen aan het te kort schietende exacte mathematisch-historische onderzoek, wanneer men zich tenminste eenig afgerond beeld wil vormen van den samenhang der opgemerkte verschijnselen. Die hulp der fantasie is natuurlijk bij alle historisch onderzoek onontbeerlijk: de historie is evengoed als de natuurwetenschap aangewezen op de vorming van hypothesen (d. w. z. verzinsels) ter voorloopige verklaring en samenvatting van waargenomen feiten en op de toetsing van de logische consequenties dier hypothesen aan de reeds ervaren of nog te ervaren werkelijkheid. Niet zelden echter is de geschiedenis van de wis- en natuurkunde bij de toepassing van deze methode minder exact geweest dan de wis- en natuurkunde zelf; menigmaal zijn hypothesen opgesteld en overgeleverd alsof het feiten waren en daaraan heeft zooveel gangbaar historisch weten zijn onbetrouwbaarheid te danken. Tegenwoordig is men voorzichtiger geworden en de schrijver van de Sage toont zich althans in dit opzicht een waardig landgenoot van den bij uitstek kritischen Eneström, wijlen den leider

der Bibliotheca Mathematica, dat hij nauwkeurig meedeelt, när fantasien släppes lös, d. w. z. wanneer hij aan zijn fantasie den vrijen teugel laat.

Het zijn niet de minst interessante deelen van zijn betoog, waar dit geschiedt. Als voorbeeld moge de verleidelijke hypothese worden vermeld, volgens welke de invoering van de afzonderlijke symbolen voor vijf, vijftig en vijfhonderd in het Grieksche acrophonische en het Romeinsche cijfersysteem te verklaren zou zijn als een afspiegeling van het samenvatten van vijf eenheden van eenzelfde trap tot een eenheid tusschen deze trap en de volgende op den door de Grieken verbeterden abacus.

Inzake de ontwikkeling van het Indo-Arabische cijferstelsel verdedigt de schrijver met nadruk de aanspraken van de Indische wiskundigen op de ontdekking tegenover de uitermate kritische houding, die Kaye op dit gebied heeft ingenomen. Bijzondere aandacht wordt besteed aan de z.g. etymosemie, d. w. z. het onderzoek naar de ontwikkeling van den vorm, der Indische cijfers.

Franz M. Feldhaus, Die Technik der Antike und des Mittelalters. Museum der Weltgeschichte. Akademische Verlagsgesellschaft Athenaion. Wildpark—Potsdam. 1931. R. M. 30.—.

Dit mooi uitgevoerde boek van 442 bladzijden, voorzien van 452 afbeeldingen in den tekst en 15 groote platen er buiten, bevat een ongeloofelijke hoeveelheid materiaal op het gebied van de geschiedenis der techniek vanaf het steenen tijdperk tot en met Leonardo da Vinci, op levendige wijze verteld door een schrijver, dien men al spoedig als een welkomen en aangenamen gids in dit wonderlijk museum leert aanvaarden. Want men voelt in hem niet slechts den ijverigen geleerde, die 30 jaren lang zijn voornaamste werkzaamheid op het gebied, waarover hij schrijft, gezocht heeft (14.000 noten zouden noodig zijn geweest, om de geheele documentatie te geven en het register van personen en zaken, dat het werk besluit, bevat naar schatting een 3.000 namen!) maar tevens den ruim en zelfstandig denkenden mensch, die altijd even frisch en onderhoudend, met een lichten humor soms, elders, waar het noodig is, met bijtenden spot, meedeelt uit zijn onuitputtelijke kennis.

Natuurlijk brengt de aard van het onderwerp zijn bezwaren voor de lectuur mede: de geschiedenis der techniek is vóór alles

een verzameling van detailfeiten; groote lijnen laten zich nauwelijks trekken; men heeft daardoor wel eens den indruk, alsof men één voor één de fiches van het kaartsysteem te lezen krijgt, dat de schrijver heeft moeten gebruiken. Daarbij treden dan ook wel eens vergissingen op: zoo kan men op blz. 140 een beschrijving lezen van een schietwerktuig van Ktesibios, dat met samengeperste lucht werkte en op blz. 141 hetzelfde toestel opnieuw beschreven vinden. Ook wordt het verhaal wel eens wat erg onsamenhangend, zoodat men in één alinea de meest heterogene zaken (b.v. de ijzeren hand van den overgrootvader van Catilina en de woningnood in Rome) vermeld kan vinden. Bezwaren vloeien ook wel eens voort uit de persoonlijkheid van den schrijver; hij vergeet soms, dat de lezer nog niet alles weet, wat hèm erg vertrouwd is en verzuimt dan, een toestel, dat hij afbeeldt, ook uit te leggen (zooals het geval is met de klepshydra van Ktesibios) of althans het voldoende duidelijk te maken; zoo betwijfel ik, of de werking van het Grieksche torsiegeschut uit de afbeeldingen van de Homburgsche reconstructie wel zoo duidelijk te zien is als de schrijver meent.

Maar tenslotte zijn dit alles kleinigheden, die bij de groote verdiensten van het werk volkomen in het niet vallen. Van veel meer belang is de weldadig aandoende historische exactheid, die den schrijver alle fabeltjes over de oeroude, geheimzinnige Egyptische wijsheid met een geenszins misplaatsten spot doet afwijzen, die hem telkens weer doet opkomen tegen onverantwoordelijke verzinsels over wat de Ouden kenden of konden en die hem den moed geeft, herhaaldelijk vragen, die hij stelt, onbeantwoord te laten bij gemis aan materiaal, waaruit het antwoord zou kunnen worden afgeleid (een schijnbaar voor de hand liggend standpunt, maar dat menig historicus nog niet heeft kunnen bereiken). Voortreffelijk is ook zijn polemiek tegen fantasieën van Spengler, waaruit ik èn ter kenmerking van de schrijfwijze èn om de juistheid van het betoog iets wil citeeren: Wo ist auch nur eine einzige faustische Erfinderfigur? Wo ist überhaupt der Erfinder? Es ist doch alles langsam schreitende Entwicklung, und es ist bei allem Erfinden weit mehr handwerksmässiges Schaffen und naturwissenschaftliches Überlegen vorhanden als Urgewalt des Wollens oder Leuchtkraft der Vision...... Ja, ich selbst glaubte vor dreissig Jahren, als ich zu arbeiten begann, auch an den Erfinder, der als Heros in die Welt trat. Und es ist von ihnen allen keiner als

ein Faust übriggeblieben. Jeder, auch der grösste, kroch, erdgebunden und menschlich über die Rücken seiner Vorgänger ein kleines oder grosses Stück den Weltweg weiter......

Er zou nog veel over dit boek te zeggen zijn. Nu de plaatsruimte dit belet, kan ik slechts eindigen met een woord van warme aanbeveling; de prijs zal wellicht te hoog zijn, om verspreiding op ruime schaal bij particulieren te verwachten, maar voor aanschaffing in schoolbibliotheken mag dit geen bezwaar zijn.

EEN ELEMENTAIRE AFLEIDING VAN DE WET VAN NEWTON UIT DE DRIE WETTEN VAN KEPLER[1])

DOOR

A. J. STARING.

In de kosmografie- of de mechanicalessen beperkt men zich meestal tot het bewijs dat uit de 2e wet van Kepler volgt dat op de planeet voortdurend een naar de zon gerichte kracht werkt, terwijl met behulp van de 3e wet, toegepast op het denkbeeldige geval van cirkelvormige planetenbanen, bewezen wordt dat de verschillende planeten door de zon worden aangetrokken met krachten evenredig met hun massa's en omgekeerd evenredig met het kwadraat van hun baanstralen.

Uit het volgende zal blijken, dat het mogelijk is om uit de drie wetten van Kepler de wet van Newton algemeen af te leiden, zonder de H. B. S.-kennis van wiskunde en mechanica te overschrijden, dus ook zonder differentiaalnotaties te gebruiken. Daarvoor is noodig:

a. een goed begrip van de wet der perken bij een centraalbeweging;

b. een goed begrip van de beteekenis van de normale versnelling bij een kromlijnige beweging;

c. eenige elementaire kennis van de ellips;

d. bestudeering van het eenvoudigste geval van beweging langs een ellips.

Het gestelde doel lijkt mij belangrijk genoeg om daarvoor aan de hierboven genoemde punten iets meer tijd te besteden dan men anders misschien zou doen.

---

[1]) Kortheidshalve wordt in hetgeen volgt gesproken van „de wet van Newton", waar bedoeld is de uitspraak: de versnelling van elke planeet is steeds naar het middelpunt van de zon gericht en is omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand planeet—zon.

a. De wet der perken. Men moet in de eerste plaats bewijzen dat een centraal-kracht een beweging veroorzaakt die aan de wet der perken voldoet, en omgekeerd: dat een dergelijke beweging in een plat vlak alleen een gevolg kan zijn van een centraalkracht. Verder moet men de wet in de vorm brengen waaruit blijkt dat het moment van de snelheid ten opzichte van het centrale punt constant is en bij een gesloten baan gelijk aan het dubbele oppervlak, door de baan omsloten, gedeeld door de omloopstijd.

b. Normale versnelling. Bekend wordt verondersteld dat de normale versnelling van een stoffelijk punt in een punt van zijn baan evenredig is met het kwadraat van de snelheid in dat punt:

$$a_n = Cv^2 = \frac{v^2}{\varrho}$$

waarbij dus C (kromming) en ϱ (kromtestraal) alleen afhangen van de vorm van de kromme in dat punt, en niet van de bewegingstoestand van het stoffelijk punt. Het bewijs is voor het algemeene geval niet veel ingewikkelder dan voor dat van de beweging langs een cirkel.

Of men op de meetkundige beteekenis van C of van ϱ nader wil ingaan of niet, is voor het hier gestelde doel van ondergeschikt belang.

c. Ellips. In de eerste plaats moet, uitgaande van het gegeven dat de som der voerstralen naar de brandpunten voor alle punten van de ellips hetzelfde is, de vergelijking

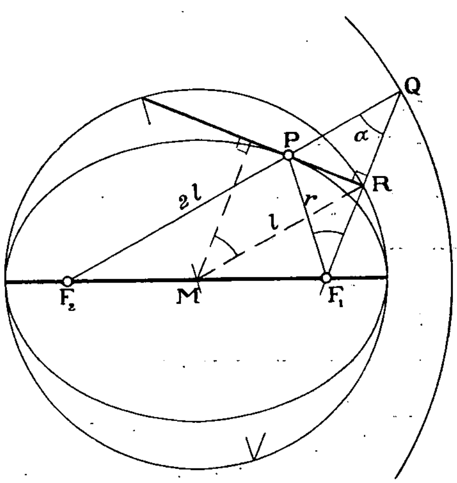
$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{k^2} = 1$$

afgeleid kunnen worden, teneinde in het vervolg een ellipsbaan als zoodanig te kunnen herkennen ($2\,l$ is hierbij de lange, $2\,k$ de korte as).

In de tweede plaats moet men bekend zijn met de eigenschap dat de raaklijn buitenbissectrice is van de hoek, gevormd door de voerstralen naar de brandpunten. Is het meetkundige bewijs hiervan nog tamelijk ingewikkeld, in de mechanicales is het bewijs gemakkelijk te geven: daar de som der voerstralen naar de brandpunten constant is, heeft een langs de ellips bewegend punt ten opzichte van beide voerstralen even groote snelheden, hetgeen

beteekent dat de projecties van de snelheidsvektor (dus van een stuk raaklijn) op beide voerstralen gelijk zijn. Hieruit volgt het gestelde onmiddellijk.

In de derde plaats is dan nog onontbeerlijk de ellipsconstructie met behulp van hoofdcirkel en richtcirkel, omdat daarbij op ongedwongen wijze de voerstralen, de raaklijn, en de richting loodrecht daarop (dus die van de normaal) te voorschijn komen. In de figuur is M het middelpunt, F_1 en F_2 zijn de brandpunten van de ellips. Beschrijf om F_2 als middelpunt een cirkel met straal $2l$ (richtcirkel); verbind een willekeurig punt Q daarvan met F_1 en F_2, dan snijdt de middelloodlijn RP van F_1Q de lijn F_2Q in P, 't punt van de ellips waarin PR raaklijn is.



Ten slotte moet de formule voor het oppervlak van de ellips gekend worden:

$$O = \pi k l,$$

gemakkelijk af te leiden door de ellips te beschouwen als een projectie van de hoofdcirkel, waarbij diens ordinaten verkort worden in de verhouding $\frac{k}{l}$.

d. Eenvoudig geval van een beweging langs een ellips. Vóór dat men aan de planetenbeweging toe is, heeft men gelegenheid een beweging langs een ellips ter sprake te brengen wanneer men de resulteerende beweging bepaalt van 2 harmonische trilbewegingen met dezelfde trillingstijd T, volgens onderling loodrechte lijnen, en met een phaseverschil van $\frac{\pi}{2}$. Dit is het bekende geval van de beweging van een stoffelijk punt onder invloed van een naar een vast punt gerichte kracht, evenredig met de afstand tusschen beide punten, waarbij dus de ellips te voorschijn komt als een der z.g. figuren van Lissajous. Daar men veronderstellen mag dat de eigenschappen der harmonische beweging bekend zijn, levert dit bewegingsgeval geen enkele moeilijkheid op.

Men leidt dus uit de vergelijkingen

$$x = l \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad \text{en} \quad y = k \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

af dat de baan een ellips is; de omloopstijd is T. De totale, naar het middelpunt M gerichte versnelling, is gelijk aan

$$\frac{4\pi^2}{T^2} . \overline{MP} .$$

Uit de figuur volgt dat de projectie van $\overline{MP}$ op de normaal in P gelijk is aan *l cos α*, dus is voor het beschouwde bewegingsgeval de normale versnelling:

$$a_n = \frac{4\pi^2}{T^2} l \cos \alpha .$$

Toepassing van de wet der perken geeft

$$vl \cos \alpha = \frac{2\pi kl}{T}$$

zoodat in het punt P de snelheid is

$$v = \frac{2\pi}{T} . \frac{k}{\cos \alpha} .$$

Dus is in het punt P de kromtestraal van de ellips:

$$\varrho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{k^2}{l \cos^3 \alpha}$$

Deze uitdrukking voor de kromtestraal in een punt van de ellips, hetwelk bepaald is door de hoek α, wordt nu gebruikt om de wet van Newton uit de wetten van Kepler af te leiden.

Toepassing op de planetenbeweging. Zij thans F_1 het middelpunt van de zon en P dat van de planeet op een gegeven oogenblik. De voerstraal is *r*. De wet van de perken stelt in staat om te zeggen dat de versnelling van de planeet steeds naar F_1 gericht is, en dat de snelheid in P voldoet aan de betrekking

$$v . r \cos \alpha = \frac{2\pi kl}{T}$$

waarin nu T voorstelt de omloopstijd van de planeet. Dus

$$v = \frac{2\pi kl}{Tr \cos \alpha} .$$

De normale versnelling van de planeet in P is evenwijdig aan RF_1 en moet gelijk zijn aan

$$a_n = \frac{v^2}{\varrho} = \frac{4\pi^2 k^2 l^2}{T^2 r^2 \cos^2 \alpha} . \frac{l \cos^3 \alpha}{k^2} = \frac{4\pi^2 l^3}{T^2 r^2} \cos \alpha .$$

De totale versnelling a, naar F_1 gericht, is gelijk aan de normale versnelling, gedeeld door $\cos\alpha$, zoodat

$$a = \frac{a_n}{\cos\alpha} = \frac{4\pi^2 l^3}{T^2 r^2}$$

waarmede de wet van Newton voor één planeet bewezen is.

Volgens de 3e wet van Kepler is echter $\frac{l^3}{T^2}$ voor alle planeten hetzelfde, dus geldt voor elke planeet

$$a = \frac{c}{r^2}.$$

waarin c een constante is, voor alle planeten dezelfde.

Het is ook mogelijk de wet van Newton te vinden zonder de kromtestraal van de ellips te gebruiken, maar dan moet de wet van het behoud van arbeidsvermogen toegepast worden.

Uit de gevonden uitdrukking voor de snelheid van de planeet volgt voor de kinetische energie:

$$\tfrac{1}{2} mv^2 = m \frac{2\pi^2 k^2 l^2}{T^2 r^2 \cos^2\alpha}$$

waarin m de massa van de planeet is.

De cosinusregel, toegepast in $\triangle MF_1R$, geeft

$$\cos^2\alpha = \frac{k^2}{2lr - r^2}.$$

zoodat

$$\tfrac{1}{2} mv^2 = m \,.\, \frac{4\pi^2 l^3}{T^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2l}\right) = mc\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2l}\right)$$

waarin c weer voor alle planeten dezelfde constante is.

Daar de som van kinetische en potentieele energie van de planeet onafhankelijk van r moet zijn, heeft men

$$\text{potentieele energie} = \text{constante} - \frac{mc}{r}.$$

Hieruit is op de bekende manier af te leiden dat de naar de zon gerichte kracht is $\frac{mc}{r^2}$.

Wageningen, Nov. 1931.

DE MEETKUNDIGE VERWANTSCHAPPEN OP DE MIDDELBARE SCHOOL

DOOR

U. H. VAN WIJK.

Klein en Schimmack schrijven op blz. 129 van hun werk: „Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen": „Der Begriff der Verwandtschaft als einer umkehrbar eindeutigen (stetigen) Punkttransformation soll dem Schüler als eine Verallgemeinerung des einfachen Funktionsbegriffs deutlich gemacht werden."

In gelijken zin uit zich Tannery op blz. 327 van zijn werk: „Science et Philosophie". We lezen daar:

„Tout en respectant des divisions consacrées, et qui ont l'avantage de bien se fixer dans la mémoire, il est cependant légitime de montrer le lien qui fait une théorie d'un faisceau de théorèmes, et d'orienter la géométrie dite élémentaire vers la science moderne, en y faisant pénétrer, comme le demande M. Laisant, l'idée de la transformation des figures."

Met instemming neem ik deze uitlatingen van gezaghebbende zijde over en zal trachten aan een enkel voorbeeld te demonstreeren, hoe bij het meetkunde-onderwijs aan de verwantschap van figuren een domineerende plaats ingeruimd kan worden.

Bij het planimetrie-onderwijs in de 2e klasse zou ik naast de homothetische figuren de perspectief-affiene behandeld wenschen te zien. Bijzondere moeilijkheden kan dat niet opleveren. Men heeft, als $AA_1 \,//\, BB_1 \,//\, CC_1$ slechts te bewijzen (fig. 1), dat de snijpunten F en F* van DE met AB en A_1B_1 samenvallen. Dit volgt uit een paar evenredigheden.

$$\left.\begin{array}{l} p : p_1 = q : q_1 \\ p : p_1 = r : r_1 \end{array}\right\} \longrightarrow q : q_1 = r : r_1 = f.$$

Het voordeel hiervan is, dat de leerlingen, die met deze verwant-

schap later bij de beschrijvende meetkunde kennis maken en ze daar zoo goed kunnen toepassen [1]), er in de hoogere klassen niet vreemd tegenover komen te staan [2]).

Een belangrijk geval van perspectief-affiene ligging is de axiale

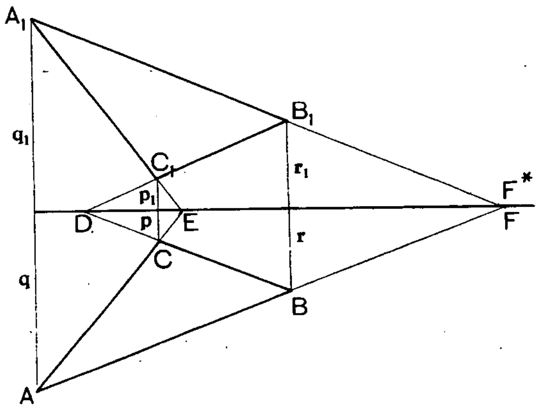


Fig. 1.

symmetrie, waarbij $f = -1$. Wij kunnen die b.v. demonstreeren aan een trapezium en hebben dan het voordeel er de tweevoudige homothetie, die later bij de cirkeltheorie weer ter sprake zal komen, bij te kunnen behandelen.

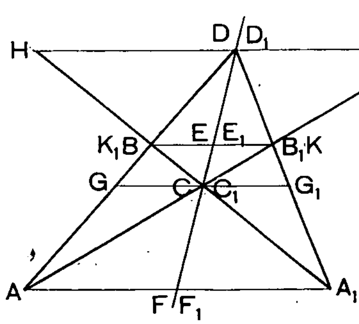


Fig. 2*a*.

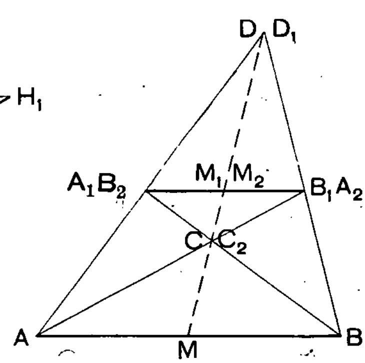


Fig. 2*b*.

In fig. 2a is de notatie zoodanig gekozen als met de perspectief-affiene ligging van de driehoeken ABC en $A_1B_1C_1$ overeenkomt.

---

[1]) Zie het artikel van Wijdenes in dit tijdschrift (7e jaargang blz. 113—139).

[2]) Helaas komt in fig. 1 de algemeene perspectief-affiene ligging te veel de rechte symmetrie nabij.

(De verwantschap is door deze 3 paar toegevoegde punten bepaald). Gemakkelijk wordt nu aangetoond, dat $CG = G_1C_1$ of $DH = H_1D_1$, waaruit volgt, dat we met scheeve symmetrie te maken hebben. Daaruit kan dan weer geconcludeerd worden, dat $BE = E_1B_1$ en $AF = F_1A_1$. Fraaier kan dit nog aangetoond worden door op te merken, dat B_1 opgevat als een punt K van AC getransformeerd wordt in $K_1 \equiv B$ van A_1C_1. Dan is

$$BE = f \,.\, B_1E_1 = f \,.\, KE = f^2 \,.\, K_1E_1 = f^2 \,.\, BE, \text{ zoodat } f = -1.$$

De verwantschap is involutorisch.

De notatie in fig. 2*b* is in overeenstemming met de tweevoudig homothetische ligging van de lijnsegmenten AB en A_1B_1 (B_2A_2). (De verwantschap is door deze 2 paar toegevoegde punten bepaald). Homothetische centra (in- en uitwendig gelijkvormigheidspunt) zijn de punten $D(D_1)$ en $C(C_2)$. Het midden M van AB wordt in beide gevallen in het midden $M_1(M_2)$ van A_1B_1 (B_2A_2) getransformeerd, zoodat de collineaire ligging van C, D en de middens der evenwijdige zijden van het trapezium wederom is aangetoond. Deze verwantschappen zijn niet involutorisch. Men vatte daartoe b.v. $B_1(A_2)$ op als een punt E en construeere E_1 en E_2.

Wanneer men de leerlingen dan nog de punten C_1 en D_2 en de beide aan een willekeurig punt van het veld toegevoegde punten laat construeeren en hun (zonder bewijs) vertelt, dat op deze wijze alle paren gelijkvormige, in zich zelf centraal-symmetrische figuren, dus ook b.v. parallelogrammen en cirkels, in tweevoudig homothetische ligging gebracht kunnen worden, is, naar ik meen, een stukje verwantschapsmeetkunde behandeld, dat geenszins buiten het bereik van den gemiddelden leerling valt.

Men ga in zijn enthousiasme voor de verwantschapsmeetkunde echter niet te ver. De algemeen perspectieve ligging moet m. i. niet op de middelbare school behandeld worden, evenmin de constructie van rotatie-centra van rechtstreeks gelijkvormige figuren, tenzij het centrum onmiddellijk is aan te wijzen, zooals bij de twee driehoeken, waarin een rechthoekige driehoek door de hoogtelijn op de schuine zijde verdeeld wordt. Hetzelfde geldt voor de kwadratische verwantschappen, zooals de inversie, de isogonale en isotonische verwantschap. Men kan ze even noemen, maar meer ook niet.

OVER DE WENSCHELIJKHEID DER INVOERING VAN DE BEGINSELEN DER DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING BIJ HET ONDERWIJS IN DE 4E KLASSE DER H. B. S.

(Inleiding, gehouden op de algemeene vergadering van de Vereeniging van leeraren in de wiskunde, de mechanica en de kosmographie aan hoogere burgerscholen met vijfjarigen cursus B, lycea en meisjes hoogere burgerscholen met 5/6-jarigen cursus op 29 December 1931).

DOOR

DR. G. C. GERRITS.

Mijnheer de Voorzitter, Dames en Heeren!

Toen ruim een jaar geleden in een vergadering van de natuurkunde-sectie van de Vereeniging van leeraren in natuur- en scheikunde door mij een bespreking van de „Invoering van de infinitesimaalrekening bij het onderwijs in de natuurkunde en de mechanica op de hoogere burgerschool" was ingeleid, werd op de volgende algemeene vergadering van die vereeniging, — in het voorjaar van dit jaar, — dit punt op het werkplan van die Vereeniging geplaatst. Het kwam toen het bestuur van de Vereeniging van leeraren in natuur- en scheikunde het meest gewenscht voor tot het bestuur van Uwe Vereeniging het verzoek te richten deze invoering in een bijeenkomst der beide besturen nader onder het oog te zien. Deze bespreking werd in October j.l. gehouden en het gevolg ervan was het verzoek dit onderwerp thans op deze algemeene vergadering voor U in te leiden. Ik dank het bestuur voor de gelegenheid, die het aldus geboden heeft, het onderwerp hier in deze vergadering nader onder Uw aandacht te brengen.

Het punt van de agenda luidt: Over de wenschelijkheid der invoering van de beginselen der differentiaal- en integraalrekening bij het onderwijs in de 4e klasse der H. B. S.

Feitelijk kan van een *invoering* van dit onderwijs op de H. B. S. niet gesproken worden. Immers, reeds wordt algemeen van de differentiaalrekening bij het onderwijs in de mechanica in de 4e klas gebruik gemaakt. Wanneer men ze al ontgaat bij de definitie van eenparige beweging en de afleiding van de bewegingsvergelijking van die beweging, dit is niet meer het geval, wanneer men gaat spreken van de snelheid op een bepaald oogenblik bij de eenparig versnelde of vertraagde beweging of in het algemeen van de snelheid op een bepaald oogenblik bij de veranderlijke beweging. Dan geven we als definitie de limiet, waartoe het differentiequotient van den weg naar den tijd nadert, als de limiet van den tijd nul is, dat is dus het differentiaalquotient van den weg naar den tijd.

Wel worden de namen differentiequotient en differentiaalquotient veelal niet genoemd; men voert de gemiddelde snelheid in en duidt die veelal aan door $\frac{s_{t+t'} - s_t}{t'}$ en komt dan tot de snelheid na t sec. door de limiet van dezen vorm te nemen (bij lim. $t' = 0$). Maar wanneer we dit quotient iets anders schrijven, als $\frac{s_{t+\Delta t} - s_t}{\Delta t}$, dan heeft het den vorm, waaronder we steeds een differentiequotient beschouwen en de limiet hiervan (als lim. $\Delta t = 0$ is), is dan het differentiaalquotient $\frac{ds}{dt}$, dus het differentiaalquotient van den weg naar den tijd.

Men kan de invoering van dit differentie- en differentiaalquotient ontgaan door een andere definitie van de snelheid: onder snelheid, die een punt, dat in veranderlijke beweging is, op een bepaald oogenblik heeft, verstaat men den weg, dien het van dat oogenblik af in één seconde zou afleggen, als de kracht, die de verandering veroorzaakt, ophield te werken, zoodat de beweging eenparig werd.

Men ontgaat hiermee het gebruik der differentiaalrekening, maar neemt daartoe een definitie aan, die den toets van een nauwkeurige beschouwing niet doorstaan kan. Op deze wijze definieert men de snelheid bij een veranderlijke beweging op een bepaald oogenblik toch als „een grootheid, die is, wat zij worden zou, als zij bleef, wat zij was." Langzamerhand is deze definitie, die vroeger veelal werd aangenomen, uit ons onderwijs verdwenen.

Niet alleen bij het aanbrengen van het begrip snelheid, ook bij versnelling wordt de differentiaalrekening toegepast.

Men gaat dan veelal uit van de definitie van gemiddelde versnelling. Is de beweging rechtlijnig, dan wordt deze gemiddelde versnelling het differentiequotient van de toename der snelheid en die van den tijd, waarna men komt tot de definitie van versnelling op een bepaald oogenblik; de limiet van het differentiequotient, als de limiet van $\triangle t = 0$ is, is dan het differentiaalquotient van de snelheid naar den tijd, $\frac{dv}{dt}$.

Beperkt men zich tot de behandeling van de eenparig veranderlijke beweging en laat men een algemeene beschouwing van het begrip versnelling achterwege, dan is het mogelijk de differentiaalrekening te ontgaan. Maar bijna algemeen wordt in de mechanicaleerboeken de versnelling bij de eenparig veranderlijke beweging als een differentiaalquotient gedefinieerd, al wordt dit als zoodanig niet uitdrukkelijk vermeld.

Zoo treedt dus de differentiaalrekening reeds meer dan eens bij ons onderwijs op.

En hoe is het met de integraalrekening? Ook deze wordt meermalen toegepast.

In de eerste plaats bij de afleiding van de betrekking tusschen weg en tijd bij de eenparig veranderlijke beweging. Sommigen onzer doen aan deze afleiding voorafgaan de grafiek van de snelheid als functie van den tijd, *de lijn der snelheden.*

In dit diagram wordt dan de doorloopen weg gevonden als het oppervlak van de figuur, begrensd door de kromme lijn, de tijd-as en twee abscissen, d. i. een bepaalde integraal. Hiermede worden dan de bekende formules voor den weg bij de eenparig versnelde en de eenparig vertraagde beweging afgeleid.

Een andere afleiding is die, waarbij men den tijd in kleine tijdperken verdeelt, de wegen, in die tijdperken doorloopen, sommeert en de limiet van de som bepaalt, wanneer de limiet van het tijdperk nul is. Ook op deze wijze wordt feitelijk een bepaalde integraal opgelost.

En dat ook van de integraalrekening bij de natuurkunde gebruik gemaakt wordt, is wel bekend: zoowel bij de bepaling van den potentiaal in een punt van een centraal electrisch veld als bij

de berekening van de energie van een geladen geleider wordt een bepaalde integraal berekend.

Ook van *invoering* van de integraalrekening bij het onderwijs op de hoogere burgerschool is dus feitelijk geen sprake. Zoowel de differentiaal- als de integraalrekening worden zoo zonder uitzondering bij het onderwijs op de hoogere burgerschool toegepast, al wordt dan niet uitdrukkelijk hiervan melding gemaakt.

De vraag, die hier gesteld moet worden is dus niet: Zullen we de differentiaal- en de integraalrekening invoeren, maar deze: is het gewenscht aan de toepassingen van de infinitesimaalrekening, die thans algemeen behandeld worden, een meer stelselmatige behandeling van de allerbelangrijkste hoofdzaken te laten voorafgaan?

De wenschelijkheid de infinitesimaalrekening *om haar zelf* op de hoogere burgerschool in te voeren, is al een dertigtal jaren geleden in de Vereeniging van Leeraren betoogd, toen voor het eerst de leerplannen van de A- en B-afdeelingen in die Vereeniging ter sprake werden gebracht. Later (in 1907) is door Ir. Vaes de wenschelijkheid verdedigd en zijn de beginselen op eenvoudige en duidelijke wijze door hem in een leerboek voor het M. O. behandeld. Verschillende leerboeken voor het M. O. in beknopten en meer uitgebreiden vorm zijn in het laatste tiental jaren over die beginselen verschenen. Ik meen U te mogen herinneren aan de leerboeken van Van de Vooren, Derksen, Van Thijn, Van den Heuvel Rijnders, Schogt, Droste, de Groot en de Jong, Beth, en misschien zijn er nog vele andere.

Deze bepleiten de behandeling der infinitesimaalrekening met het oog op het wiskunde-onderwijs, de bevordering van het wiskundig denken. Het is onnoodig in deze vergadering hierop nader in te gaan. Alleen zij nog opgemerkt, dat aan de behandeling de ontwikkeling van het limietbegrip en van het functiebegrip in de lagere klassen dient vooraf te gaan. Nu „grafische voorstellingen" niet alleen in het leerplan zijn opgenomen, maar ook op het eindexamen geëischt worden, mag men aannemen, dat hieraan de vereischte aandacht besteed wordt.

Maar ook ter wille van de toepassingen der infinitesimaalrekening, die wij doceeren, is een stelselmatige behandeling van de allereenvoudigste grondbeginselen gewenscht. Het heeft stellig voordeelen, dat de differentiaalquotienten en de integralen, die bij de ontwik-

keling van de begrippen snelheid, versnelling enz. opduiken, niet als op zich zelf staande symbolen behandeld worden, maar in verband gebracht kunnen worden met het algemeene begrip differentiaalquotient en integraal. Het inzicht in de beteekenis ervan wordt bevorderd en de toepassing bij verschillende vraagstukken vergemakkelijkt.

Herhaaldelijk zal men van deze „inleiding" gebruik kunnen maken. Natuurlijk in de eerste plaats bij de thans zoo tijdroovende behandeling van de inhoudsbepalingen bij de stereometrie. Zoo bij de mechanica: bij de ontwikkeling van het snelheidsbegrip der veranderlijke beweging, bij de afleiding van de betrekking tusschen snelheid en tijd bij de eenparig veranderlijke beweging, bij de omschrijving van het begrip versnelling en bij de afleiding van de formule voor den weg als functie van den tijd bij die beweging, bij de versnelling van de eenparige cirkelbeweging, bij een eventueele behandeling der harmonische beweging, bij de bepaling van zwaartepunten, enz.

Bij het natuurkunde-onderwijs zal men, behalve bij de uiteenzetting van het potentiaalbegrip en bij de bespreking van eenvoudige eigenschappen van den potentiaal in het electrisch en magnetisch veld, er ook gebruik van kunnen maken bij de nadere beschouwing van enkele eigenschappen van het licht en bij de bepaling van maxima en minima (minimum van deviatie, en maximum van stroomsterkte bij schakeling van elementen of accu's).

Wanneer men dus aanneemt, dat ter wille van de infinitesimaalrekening zelf en ter wille van de toepassingen, die wij ervan doceeren, de invoering gewenscht is, dan doet zich de vraag voor: Wanneer dienen deze beginselen behandeld te worden?

Wil men bij de behandeling van de mechanica in de 4e klasse van de kennis der leerlingen betreffende differentiaal- en integraalrekening gebruik maken, dan dient deze aan de behandeling der mechanica vooraf te gaan. Het meest geschikt zal dus zijn ze te plaatsen aan het begin der 4e klasse, als inleiding tot de mechanica en de behandeling van deze dus op te schorten, totdat die van de allerbelangrijkste beginselen der infinitesimaalrekening geëindigd is.

Men zal voor deze behandeling tijd moeten vinden en dus andere onderwerpen dienen uit te schakelen. Het is toch niet goed mogelijk aan het reeds thans omvangrijke programma der hoogere burger-

school nog nieuwe onderwerpen toe te voegen. Is er in de 4e klas leerstof, die zonder groote bezwaren aan de behandeling van de grondbeginselen der infinitesimaalrekening kan worden opgeofferd?

Een weg, dien men zou kunnen inslaan en die mij zeer gewenscht voorkomt, is de opoffering van een klein deel van het mechanica-program der 4e klas.

Wanneer men de behandeling van de koppels beperkt tot die van het moment van een koppel en het samenstellen van eenige koppels, die in hetzelfde vlak gelegen zijn en achterwege laat: de behandeling van de samenstelling van koppels in evenwijdige en in elkaar snijdende vlakken, het begrip koppelvector, de samenstelling van meer dan twee koppels in verschillende vlakken, die van een kracht en een koppel, al of niet in één vlak gelegen, en de samenstelling van meer dan twee krachten, die op een vast lichaam werken en niet in eenzelfde vlak liggen, dan wordt aan de begrippen en eigenschappen der mechanica niet noemenswaard tekort gedaan en aldus voldoende tijd gewonnen om de behandeling van de eenvoudigste beginselen der infinitesimaalrekening mogelijk te maken.

Al zou aldus niet in strijd gehandeld worden met het voorgeschreven leerplan der hoogere burgerscholen, zoodat zonder wijziging van het K. B., dat dit leerplan regelt, reeds tot invoering zou kunnen worden overgegaan, toch komt het mij zeer gewenscht voor, — ter wille van de eenheid van behandeling aan verschillende scholen, — dat in het onderwijsprogramma zouden worden aangegeven de onderwerpen der infinitesimaalrekening, die in de 4e klas behandeld zouden moeten worden.

Bij deze wijze van invoering, — ik meen hierop nog terloops te mogen wijzen, — zou men ook tegemoet komen aan de wenschen van hen, die het mechanica-onderwijs meer aan de proefondervindelijke natuurkunde willen doen aanpassen; het bepaalde gedeelte der mechanica, dat aldus zou komen te vervallen, heeft toch bijna uitsluitend wiskundige beteekenis.

Een geheel andere weg om tot het gewenschte doel te geraken zou zijn het doen vervallen van het een of ander onderwerp uit het wiskunde-program, bijv. de behandeling van de exponentiëele en logarithmische vergelijkingen. Hiervoor zou ongetwijfeld eerst noodig zijn wijziging van het K. B., dat het onderwijsprogram der hoogere burgerscholen regelt.

Zal de ingevoerde leerstof ook tot opgaven bij het eindexamen leiden? Het komt mij voor, dat het zeker niet gewenscht is ze op het schriftelijk eindexamen te vragen. Het zou evenwel den leeraar, die op het mondeling examen enkele vragen erover wenscht te stellen, alleszins geoorloofd moeten zijn, dit te doen; evenwel zou dit niet van de zijde van den deskundige verlangd mogen worden. De leeraar zelf zou daartoe alle vrijheid moeten behouden.

De vraag: Wat dient bij de invoering van de differentiaal- en integraalrekening op de hoogere burgerschool ervan behandeld te worden? zal straks door Dr. Post worden ingeleid. Alleen wil ik mijnerzijds daaromtrent opmerken, dat die leerstof naar mijn meening tot het allerbelangrijkste beperkt dient te worden.

Het gebruik der infinitesimaalrekening zal in vele gevallen afleidingen en berekeningen eenvoudiger maken. De invoering der gewrongen en voor de leerlingen dikwijls moeilijk te begrijpen verkapte infinitesimaalrekening, — waar men tot nu toe niet buiten kon, — wordt ontgaan. Het inzicht der leerlingen wordt er door verhelderd, terwijl de kennis der infinitesimaalrekening ook later van dienst kan zijn bij verdere studie in de medische wetenschap, de biologie, de technische wetenschappen (ook aan een middelbare technische school), de psychologie en de economie, terwijl het ook bij een latere studie in die vakken, waarbij de differentiaal- en integraalrekening gedoceerd worden, voor den leerling van belang is, dat hij bij het voorbereidend onderwijs met de grondbegrippen der infinitesimaalrekening vertrouwd werd gemaakt.

Dat voor het tot stand brengen van deze wijziging in het onderwijs aan de Vereeniging van leeraren in de wiskunde, de mechanica en de kosmographie aan hoogere burgerscholen met vijfjarigen cursus gedacht werd, ligt voor de hand. Vooreerst zijn de leeraren in de wiskunde en de mechanica bij de invoering der infinitesimaalrekening nauw betrokken. Maar bovendien heeft deze Vereeniging zich reeds meermalen bezig gehouden met wijzigingen van het leerplan voor de wiskunde aan de H. B. S. in dien zin, dat hierin de infinitesimaalrekening wordt opgenomen.

In 1926 werd door de Commissie-Beth in haar bekend „Ontwerp van een leerplan voor het onderwijs in wiskunde, mechanica

en kosmographie op de H. B. Scholen met 5-jarigen cursus" de invoering der infinitesimaalrekening bepleit.

Betreffende dit Ontwerp werden in den 3den jaargang van het „Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde" (de voorlooper van „Euclides") verschillende bezwaren ingebracht en beantwoord.

In 1927 is door het Bestuur dezer Vereeniging bij den Inspecteur Dr. Jensema een rapport ingediend, inhoudende de meening van het bestuur aangaande het ontwerp der Commissie-Beth. Uit dit rapport blijkt, dat ook het bestuur van deze Vereeniging de invoering der infinitesimaalrekening op de H. B. S. 5-j. c. gewenscht acht.

In datzelfde jaar heeft de Commissie-Beth enkele wijzigingen en aanvullingen in het Ontwerp-leerplan aangebracht in verband met de te berde gebrachte opmerkingen en aldus haar Ontwerp op eenige punten vereenvoudigd. De invoering der infinitesimaalrekening bleef in het gewijzigd Ontwerp gehandhaafd.

Waar nu het Bestuur van Uwe Vereeniging zich vóór de invoering der infinitesimaalrekening uitsprak, zult U het begrijpelijk achten, dat de Vereeniging van leeraren in natuur- en scheikunde zich tot Uwe Vereeniging, — die bij de invoering der infinitesimaalrekening nauwer betrokken is, — wendt met het verzoek deze aangelegenheid verder te willen aanvatten. Wij hopen, dat deze invoering door U bevorderd zal worden.

BOEKBESPREKINGEN.

T. Ehrenfest-Afanassjewa, Uebungensammlung zu einer geometrischen Propädeuse. Haag, Martinus Nijhoff, 1931. 44 bladzijden; prijs *f* 1.—.

Zooals bekend ondersteld mag worden, tracht men tegenwoordig veelal den leerlingen den weg tot het begrip der meetkunde te effenen door het onderwijs te beginnen met een inleidenden cursus, waarin getracht wordt de leerlingen langs den weg der aanschouwing met eenige belangrijke stellingen der meetkunde in kennis te brengen; later worden deze stellingen (met andere) in een zoogenaamden systematischen cursus vereenigd en op de gebruikelijke manier bewezen. Mevrouw Ehrenfest is van meening, dat deze handelwijze bezwaren meebrengt, dat vooral het tweemaal op verschillende wijze behandelen van dezelfde onderwerpen moet worden vermeden, en geeft daarom een principieel anderen inleidenden cursus, waarin getracht wordt, den leerlingen meetkundige begrippen en ruimtelijke voorstelling te doen verkrijgen, door hen allerlei eenvoudige experimenten te laten verrichten.

Aan de verzameling dezer experimenten, de oefeningen, gaat eene lange inleiding vooraf, waarin de schrijfster hare denkbeelden uiteenzet, en zich beurtelings keert tegen de vertegenwoordigers der beide voornaamste richtingen in de didactiek der meetkunde, de logici en de practici. Het is (mij althans) niet mogelijk, in kort bestek een overzicht van den inhoud dezer interessante inleiding te geven; aan krasse uitspraken is daarin geen gebrek: zoo zegt de schrijfster, dat de leeraren meestal geen juist inzicht hebben in het doel der bewijzen van aanschouwelijk evidente stellingen: het leggen van het verband met andere stellingen, dus het plaatsen in een systeem. Zou het werkelijk zoo erg wezen?

Maar er is een uitspraak in die inleiding, waarmee ik van harte kan instemmen, en de meeste mijner lezers zeker ook wel, namelijk, dat wat bij het oplossen van meetkundige vraagstukken steeds zulk een gevoel van groote voldoening geeft, is het scheppen van orde, van overzichtelijkheid, waar die eerst ontbrak: aus einem Chaos Ordnung schaffen. Maar nu is het voor mij de groote vraag, of men dit orde scheppen moet gaan uitvoeren op zoo geweldig groote schaal, als mevrouw Ehrenfest wil: of nu werkelijk de leerlingen (*onze* leerlingen, *wij* kennen ze) orde moeten scheppen in den chaos der ruimteproblemen. Zou het niet meer in overeenstemming met hunne vermogens zijn, als we hun opdroegen, de soms zeer talrijke mogelijkheden bij de oplossing van een meetkundig werkstuk op overzichtelijke wijze te rangschikken. Is dat niet wat minder formidabel, en toch ook voldoening gevend?

Belangstellenden zij de lezing van Mevrouw Ehrenfest's werkje aanbevolen. J. H. S.

Prof. Dr. Alexander Ostrowski, Studien über den Schottkyschen Satz. [B. Wepf & Cie., Verlag, Basel, 1931; 111 bladzijden].

De stelling van Picard over het gedrag van een holomorfe functie bij een essentieel singulier punt is het onderwerp van veel onderzoekingen geweest. Een merkwaardig resultaat vormt de stelling van Schottky—Landau, die wij hier even als volgt formuleeren:

als $f(z)$ holomorf is en van 0 en 1 verschilt voor $|z| < 1$ en als $|f(0)| < 1$, dan geldt voor $|z| < \frac{1}{2}$: $|f(z)| < A$, waarin A een wereldconstante is.

Deze stelling, hoewel algemeener geformuleerd, is het uitgangspunt van Ostrowski's boek. Uitbreidingen ervan, benevens quantitatieve verscherpingen worden gegeven in de hoofdstukken I en IV.

Hoofdst. II behandelt de zoogenaamde Julia-rijen. Zij $f(z)$ holomorf buiten een cirkel C, terwijl het oneindige een essentieel singulier punt is. Een rij van tot ∞ naderende complexe getallen σ_n heet Julia-rij van de eerste soort, als er een punt ζ bestaat met de eigenschap: is Ω een nòg zòo kleine cirkel om ζ, dan vult de gezamenlijke waardevoorraad van de functies $f(\sigma_n z)$ in Ω het heele vlak, uitgezonderd hoogstens één waarde. Bij dit onderzoek spelen de Montel'sche normaalrijen den hoofdrol. Een merkwaardige uitkomst is, dat, zoo er een rij σ_n is, die geen Julia-rij is, $f(z)$ gelijkmatig tot ∞ nadert op een stel ringen waarvan de relatieve breedte $\rightarrow \infty$; merkwaardig omdat we daardoor het recht hebben, te beweren dat in het algemeen iedere rij een Julia-rij is. Belangwekkend is ook het onderzoek van de functies, die de eigenschap hebben, dat ieder punt ζ dienst kan doen bij iedere rij σ_n. Op de Julia-rijen van de soorten 2, 3, 4 en 5 zullen wij niet ingaan, en volstaan met de opmerking dat de studie eenvoudig is, doordat men geen bepaalde getallenwaarden behoeft te gebruiken.

Het verdient aanbeveling, ook Hoofdst. III, over de dichtheid van de verzameling der punten waar een buiten een cirkel C holomorfe en van nul verschillende functie de waarde 1 heeft, bij eerste lezing op een dergelijke qualitatieve manier te bestudeeren. Inderdaad, gebruikt men de stelling van Schottky—Landau zonder te letten op mogelijke schattingen van A (zie boven) en van andere wereldconstanten die voorkomen in stellingen die uit de eerstgenoemde worden afgeleid, dan bereikt men met gemak de theorema's 19 en 20, waarin 2^9 vervangen is door een in het midden gelaten constante. Deze theorema's komen ruw gezegd op het volgende neer: de cirkels om O, waarop punten liggen waar $f = 1$, liggen op den duur nog al dicht bij elkaar. Natuurlijk zijn de taxaties zeer belangrijk en verscherpen zij de qualitatief afgeleide resultaten.

De lezer zal ervaren dat enkele bewijzen korter hadden gekund. Een voorbeeld is de afleiding van theorema 20 uit 19. Voldoende is de opmerking dat als een buiten een cirkel C harmonische functie $u(r, \varphi)$ de eigenschap heeft dat $u < r^{1/2}$ (wèl te verstaan $|u| < r^{1/2}$ wordt niet ondersteld), voor r voldoend groot, u constant is.

De belangwekkende verscherpingen in Hoofdst. IV berusten op de Borel-Hadamard'sche ongelijkheden.

Na dit alles zal het bijna onnoodig zijn, te zeggen dat wij het boek warm aanbevelen. J. Wolff.

J. C. G. Nottrot, kapitein der genie. Leerboek der Nomografie, de constructie van schaalnomogrammen voor betrekkingen met drie veranderlijken. Groningen 1930. P. Noordhoff N. V.

Het hier te bespreken boek is het eerste omvangrijke werk op het gebied der Nomografie, dat in onze taal is verschenen. Het is ontegenzeggelijk een gelukkige gedachte van den Schr. geweest om te trachten dit onderdeel der toegepaste wiskunde nader tot ons te brengen, of, misschien nog juister gezegd, bij ons te introduceeren. Tot nog toe toch is de nomografie voor velen onzer wiskundigen een onbekende; een omstandigheid, die bevreemdend genoemd mag worden, omdat zij vele interessante problemen omvat en ook omdat zij, blijkens de vrij omvangrijke literatuurlijst, in andere landen vele beoefenaars telt.

Een wijziging in de goede richting in dezen is evenwel reeds ingetreden, zooals — behalve uit de publicatie van den heer Nottrot — ook hieruit blijkt, dat Prof. H. J. Van Veen, hoogleeraar a/d T.H.S., dit jaar voor het eerst de nomografie op de lijst der door hem te behandelen onderwerpen heeft geplaatst.

Waar de nomografie, zoowel om haar praktische als haar theoretische zijde, een nadere kennismaking volkomen wettigt, daar zal het, naar ik vertrouw, nu de zoo juist vermelde factoren medewerken, wel niet lang meer duren, of zij zal ook ten onzent de noodige belangstelling wel vinden.

Overgaande tot een bespreking van het bovengenoemde werk kan allereerst worden opgemerkt, dat het constructieve gedeelte beter tot zijn recht is gekomen dan het theoretische, dat m.a.w. het boek meer beantwoordt aan zijn onder-titel dan dat het een leerboek der nomogafie in zijn vollen omvang is. Zelfs mag het constructieve gedeelte als zeer geslaagd worden gekwalificeerd, terwijl daarentegen de tekst bij lange na niet op een even hoog peil als de constructies staat. Alle figuren in het boek, ook die welke niet direct nomografische constructies zijn, dragen den stempel van de vaardige hand van den auteur. Als voorbeelden mogen hier worden genoemd: de logarithmische harp en de verkorte dito (figg. 18 en 19), van welke beide harpen achter in het boek nog een tweede exemplaar is afgedrukt; verder fig. 67, betrekking hebbende op de projectieve vorming van kegelsneden; fig. 31, de stroomsnelheid in kanalen, volgens de formule van Forchheimer; fig. 50, dikte van vrij opgelegde ingekaste of ingemetselde platen of balken van gewapend beton; fig. 51, bepaling der hoekcorrectie bij indirect vuur; fig. 37, tijdsbepaling uit zonshoogte of schaduwlengte; fig. 53, betrekking in een driehoek tusschen twee hoeken en de verhouding van twee zijden; fig. 24, de tweede wet van Kepler.

Al deze constructies, die naar men ziet op zeer uiteenloopende gevallen betrekking hebben, worden door den schrijver behandeld als

voorbeelden van verschillende functie-vergelijkingen, welke vergelijkingen in hun algemeenen vorm eerst uitvoerig worden besproken, terwijl de wijze, waarop de daarbijbehoorende constructies zijn vervaardigd, in den breede wordt toegelicht; welke toelichting een belangrijk deel van den tekst van het boek uitmaakt.

De constructies zoowel als de tekst doen duidelijk uitkomen, dat de Schr. de door hem behandelde stof volkomen beheerscht en daarom is het jammer, dat hij zijn tekst niet wat gemakkelijker leesbaar heeft gemaakt; dat hij verschillende zijner beweringen of op een minder juiste of op een omslachtige wijze heeft geuit en dat hij er nog al eens wat bijhaalt, dat met het goed begrip der nomografie niet te maken heeft en best achterwege had kunnen blijven.

Ik heb lang geaarzeld alvorens dit oordeel neer te schrijven; ik heb gedeelten van het boek meer dan eens doorgewerkt, heb de meening ingewonnen van iemand, die met wiskundige aangelegenheden beter op de hoogte is dan ik, maar ben tot mijn spijt niet tot een ander inzicht kunnen komen.

Met enkele voorbeelden en citaten moge ik hier dit oordeel motiveeren.

Schr. begint zijn boek met een historische *ontwikkeling,* welke neerkomt op het vermelden van de namen en enkele geschriften van wiskundigen, die zich op het gebied der projectieve meetkunde en het dualiteitsprincipe verdienstelijk hebben gemaakt. Daarbij deelt hij betrekkelijk vergaande bijzonderheden mede omtrent Poncelet en Steiner, terwijl hij Gergonne, Möbius en Plücker alleen maar noemt. Met het noemen van nog eenige namen, wier dragers de nomografie hebben gegrondvest, is in amper drie bladzijden de historische ontwikkeling voltooid.

In hoofdstuk 2 worden Taak en Wezen der Nomografie als volgt aangeduid:

> „Nomografie beteekent de voorstelling van betrekkingen tusschen „veranderlijken. Daar een betrekking niet anders dan uit een voor„stelling ervan, kan worden gekend, is voor elk verband tusschen „veranderlijken steeds een bepaalde voorstellingswijze primair. „Voor het verkrijgen van die primaire voorstelling, zorgt dus de „wetenschap, waartoe de betrekking behoort, zelf. Daarentegen „is het de taak der Nomografie, uit die primaire voorstelling de „voor elk bijzonder geval gewenschte secundaire voorstellingswijze „af te leiden.

Nu wil ik niet beweren, dat het hier geciteerde niet juist is, maar m.i. helpt het den beginneling in het geheel niet bij zijn pogen om een idee te krijgen, wat de nomografie eigenlijk wil. De verdere toevoeging van den Schr. en de daarbij geplaatste figuur maken den lezer niet wijzer.

Aan het slot van dit hoofdstuk meent Schr. onderscheid te moeten maken tusschen volledige veranderlijken, d. z. continue reëele variabelen en onvolledige veranderlijken, d. z. veranderlijken, die niet „vol" (aanhalingsteekens van den Schr.) gerekend kunnen worden, bijv. het aantal meters van een lengte, waaraan wij alle reëele positieve waarden kunnen toedenken: het aantal inwoners van een stad: een grootheid,

die alleen geheele positieve waarden kan aannemen. Hoewel Schr. mededeelt, dat hij in zijn boek de voorstelling van betrekkingen met onvolledige veranderlijken niet uitvoerig zal behandelen, meent hij toch goed te doen als voorbeeld ter toelichting nog een formule, waarin zoodanige veranderlijken voorkomen, te geven, n.l. die van een bepaalde kogelstapel.

In hoofdstuk 3, waarin de elementen der grafische voorstellingswijzen worden besproken, lezen we:

„Het meest bekende voorbeeld van een schaal is de gewone „centimeterverdeeling op een rechte liniaal of meetlat.

„We noemen dit een metrische schaal.

„Zijn alle deelen van een schaal even lang, dan noemen wij „deze een regelmatige schaal. De metrische schaal is hiervan een „bijzonder geval.

Uit deze definitie zou volgen, dat een andere gelijkmatige verdeeling dan die in centimeters op een rechte lijn geen metrische schaal zou zijn, wat zeker niet de bedoeling van den Schr. zal wezen.

In hoofdstuk 4 wordt behandeld de voorstelling van een betrekking tusschen 2 veranderlijken. Schr. zegt:

„Voor het in beeld brengen van de betrekking is een *grond-* „*figuur* noodig. Het eenvoudigste wordt deze gevormd op een „van de twee volgende wijzen:

„a. door twee naast elkaar geplaatste schalen, te zamen een *schalenstel* vormend.

„b. door twee elkaar snijdende bundels, welke te zamen een *net* vormen.

„De koppeling van twee waarden tot een waardenstel, wordt „dan op een *schalenstel* voorgesteld door de rechte verbindings- „lijn van de twee schaalpunten, op een net door het *snijpunt* van „de twee lijnen door de bedoelde waarden.

„De betrekking, d.w.z. het oneindig aantal waardenstellen „wordt ten slotte weergegeven:

„a. op het schalenstel, door een oneindig aantal rechten. In „het algemeen omhullen deze een kromme. Praktisch bestaat dus „de voorstelling uit een schalenstel met een z.g. *raakkromme*.

„b. op het net, door een oneindig aantal snijpunten, te zamen „de *snijkromme* vormend.

Hieraan voegt Schr. onmiddellijk toe, dat het niet zijn bedoeling is het bovenstaande, voor zoover het de voorstelling van de betrekkingen tusschen twee veranderlijken betreft, nader uit te werken. Hij geeft als voorbeeld, zonder eenige nadere aanduiding hoe de teekeningen tot stand komen, in figg. 4 en 5 de voorstelling der formule $v^2 = 2gh$. De lezer, die ondersteld moet worden nog een beginneling op nomografisch gebied te zijn, zal, dunkt me, aan de hier overgenomen uitleg, en meer geeft het boek te dezer zake niet, wel niet te veel hebben.

Op het boven geciteerde laat Schr. dan vrijwel onmiddellijk volgen:

„Wanneer het schalenstel en het net, niet uit regelmatige schalen „en bundels, maar resp. uit functieschalen en functiebundels „worden opgebouwd, dan is het mogelijk deze zoo te kiezen, dat

„*de raakkromme overgaat in een enkel punt* en *de snijkromme* „*gestrekt wordt tot een rechte lijn*. Voorbeelden daarvan zullen „wij later ontmoeten.

Zal de lezer zich hier niet afvragen of zulks niet mogelijk is als het schalenstel en het net wel uit regelmatige schalen resp. bundels worden opgebouwd?

De hier aangehaalde bewering wordt door Schr. zonder eenig bewijs neergeschreven: op zich zelf moge dit geen bezwaar zijn, maar het gaat toch niet aan om dan in het volgende hoofdstuk, § 22, zonder meer te schrijven:

„Wij zagen, dat een betrekking tusschen twee veranderlijken „op een schalenstel kan worden voorgesteld, bij keuze van toe- „passelijke functieschalen, door een punt.

Het wil mij voorkomen, dat de Schr. uit een didactisch oogpunt beter had gedaan om bij fig. 5 den lezer iets mede te deelen over het coördinaten-stelsel van d'Ocagne en hem hier al dadelijk te wijzen op de groote beteekenis daarvan voor de nomografie. Te meer zou dit aanbeveling verdienen, omdat hij dan duidelijk had kunnen maken op welke wijze voor het in fig. 5 gegeven geval de raakkromme tot een enkel punt kan ontaarden. Bovendien zou alsdan de lezer iets kunnen begrijpen van de in fig. 6 gegeven voorstelling, welke figuur hem zonder dat alles wel een volkomen raadsel moet blijven. Deze figuur toch, welke beoogt een voorstelling van de betrekking $h = \frac{v^2}{2g}$, is feitelijk een weergave van de betrekking:

$$2 \log v = \log h + \log 2g$$

op een dubbelschaal: maar dit wordt den lezer pas duidelijk na bestudeering van hoofdstuk 9.

Ik zou door kunnen gaan met de opsomming van eigenaardigheden van dit boek in den geest van de hier genoemde, maar ik meen met de thans gegeven aanhalingen te kunnen volstaan om eenig idee te geven van de betoogtrant van den Schrijver. Dat zijn wijze van behandeling het den lezer niet gemakkelijk maakt, zal na de gemaakte opmerkingen wel niet uitdrukkelijk behoeven te worden geconstateerd. Mocht men daarvan nog een voorbeeld wenschen, dan zou ik kunnen wijzen op hoofdstuk 19, waarin de kegelsnede-nomogrammen en de projectieve vorming van kegelsneden worden behandeld. Hier wisselen de voortbrenging van kegelsneden door projectieve stralenbundels en de functievergelijking voor het kegelsnede-nomogram elkaar nogal eens af, terwijl aan beide uitvoerige beschouwingen worden gewijd, zoodat men zich bij het lezen onwillekeurig de vraag stelt of men bezig is met de behandeling van kegelsneden dan wel met die der nomografie.

Een opmerking, die buiten de nomografie omgaat, betreft de zonderlinge plaatsing van de komma door den Schr. In de boven geciteerde zinnen kan men daarvan voorbeelden vinden, terwijl zulks verder op schier elke pagina van het boek kan worden geconstateerd.

Aan het slot van deze beschouwing deel ik nog een korte inhoudsopgave mede:

Deel I omvat de Inleiding, Deel II Functieschalen en Functievergelijkingen, Deel III de Constructie van Schaalnomogrammen voor betrekkingen met drie veranderlijken, gesplitst in een afdeeling A. Nomogrammen op een recht schalenstel en B. Nomogrammen op een gebogen schalenstel, Deel IV Scheiding der veranderlijken en Deel V Aanvullende hoofdstukken.

Typografisch is het boek uitstekend verzorgd; alleen zij opgemerkt, dat de cursieve letter *v* en de Grieksche letter n door volkomen hetzelfde teeken worden aangeduid, wat wel eenige bevreemding wekt en soms ook wel tot verwarring aanleiding kan geven.

Utrecht, Januari 1932. P. G. Tiddens.

Dr. F. Schuh, Leerboek der theoretische mechanica met inbegrip der kinematica, Tweede deel, eerste stuk. Leiden, A. W. Sijthoff, 1931. 304 bldz. Prijs *f* 10.—

Op bladzijde 46 van dezen jaargang van „Euclides" vindt de lezer de bespreking van het eerste stuk van het eerste deel van bovengenoemd werk. Thans is ook van het tweede deel het eerste stuk verschenen, dit is gewijd aan de dynamica van materieele punten en vaste lichamen. In het eerste hoofdstuk, waarover ik straks uitvoeriger zal spreken, worden de axioma's der dynamica behandeld, dan komt een hoofdstuk over levende kracht en potentieele energie van een materieel punt, waarin uitvoerige beschouwingen over krachtenvelden zijn opgenomen, dan een hoofdstuk met voorbeelden van beweging van een materieel punt, daarna een hoofdstuk over de levende kracht van een materieel stelsel, waarin traagheidsmomenten, traagheidsproducten en traagheidsellipsoide besproken worden en verschillende voorbeelden van berekening van traagheidsmomenten worden gegeven, ten slotte een hoofdstuk over de beweging van een materieel stelsel, waarin de beweging van het zwaatepunt en de beweging om het zwaartepunt worden behandeld, en waarin b.v. de aequivalente krachtenstelsels worden besproken. [1])

Evenals bij de bespreking van het eerste stuk van het eerste deel zal ik trachten de vraag te beantwoorden, in hoeverre het boek berekend is voor zijne taak, het inzicht der leeraren in de mechanica te verdiepen. Dit brengt mede, dat ik mijne aandacht zal concentreeren op het eerste hoofdstuk. In de overige hoofdstukken komen verspreid allerlei opmerkingen voor, die inderdaad zeer geschikt zijn, om den lezer inzicht in de mechanica te geven of dit inzicht te verbeteren, maar hoofdzaak blijft toch het hoofdstuk over de grondslagen.

En nu moet ik hier tot mijn spijt neerschrijven, dat de lezing van dit hoofdstuk mij eene bittere teleurstelling is geweest. Een paar dingen vind ik er minder fraai in, er zijn echter andere beschouwingen,

[1]) Uit een achter in het boek geplaatst overzicht blijkt, dat het tweede stuk van het tweede deel zal bevatten: Methode van het vrij maken, behoud van mechanisch arbeidsvermogen, centrifugaalkracht en invloed van de aswenteling der aarde op de zwaartekracht. Vergelijkingen van Lagrange. Stootkrachten en stooten. Botsing.

die men slechts met veel goeden wil als niet geheel onjuist kan beschouwen.

Minder fraai dunkt mij de behandeling van de begrippen kracht en massa. Schr. voert krachten in als oorzaken, die bewegingen ten gevolge hebben (§ 1), en zegt, verwijzende naar eenige volgende paragraphen, dat dit begrip later nader zal worden gepreciseerd. En dan volgt in een der paragraphen, waarnaar verwezen is ..... : „Wat een kracht is, kan bezwaarlijk gedefinieerd worden, maar ieder kent het begrip kracht uit zijn spiergevoel". De aanvankelijke bewering, dat krachten oorzaken zijn, die bewegingen tengevolge hebben, wordt trouwens later weer verlaten, daar Schr. ook krachten erkent, werkende op een deeltje dat niet beweegt.

De massa wordt ingevoerd door hypothetische proeven met spiraalveeren; hiermede gaat de schrijver buiten het terrein van de dynamica der materieele punten en vaste lichamen. Den rasechten physici zal het weinig kunnen schelen, of men bij de beschrijving der natuurwetten over vervormbare lichamen spreekt, maar het komt mij voor, dat het voor het inzicht in de mechanica toch wel van belang is, de dynamica der vaste lichamen zonder inmenging van vreemde elementen te fundeeren.

Veel belangrijker dan al het voorgaande is echter, dat de schrijver eene der belangrijkste eigenaardigheden van de klassieke mechanica volkomen negeert, en daardoor op dit punt zijn werk niet boven het peil der schoolboeken weet te verheffen. Ik bedoel de netelige quaestie van het vaste assenstelsel der dynamica, ten opzichte waarvan men de versnellingen moet nemen, opdat de evenredigheid met de krachten zal gelden. Men moge het herhaaldelijk wijzen op deze moeilijkheid overbodig of vervelend vinden, men zal toch moeten eischen, dat er althans één keer recht op ingegaan wordt. De beschouwing van § 5 over de wet der traagheid [1]) is goed beschouwd geheel zinledig; wel wordt even de uitdrukking „vast assenkruis" genoemd, maar wat daaronder verstaan wordt, wordt nergens gezegd. In § 29 wordt iets meegedeeld omtrent de relativiteit ten opzichte van eenparige rechtlijnige translaties, en gesproken over „een assenkruis, dat we gemakshalve (terecht of ten onrechte) als vast beschouwen"; wanneer, en in hoeverre, dit terecht kan geschieden, blijkt echter niet.

Het doet vreemd aan, in een werk als het hier besprokene, allerlei ouderwetsch-inexacte beschouwingen aan te treffen, o.a. de bekende opmerkingen over de valmachine van Atwood, zeker een heel aardig toestel, maar met een allesbehalve gemakkelijke theorie. In § 44 wordt de opvatting vermeld „dat het gewicht van het overwichtje werkt op de gezamenlijke massa," welke beschouwing weliswaar wat oppervlakkig, maar toch eenigszins aannemelijk wordt genoemd. Ware het niet beter geweest, deze onnoozele beschouwing in een hoofdstuk over

---

[1]) Ik vrees, dat de opmerking in § 5, dat de tweede en hoogere flucties der coördinaten niet traag zijn, wel tot misverstand aanleiding geven zal; ik kan er slechts deze beteekenis aan hechten, dat als de kracht, die op een stoffelijk punt werkt, op zeker oogenblik nul is, de tweede en hoogere flucties der coördinaten wel van nul verschillende flucties kunnen hebben.

de grondslagen der dynamica maar geheel te verzwijgen? Ook de hier en daar voorkomende uitdrukking „onmiddellijk voorafgaand (of volgend) tijdstip" is ver beneden het peil van een standaardwerk.

Er is gelukkig in dat hoofdstuk over de grondslagen heel wat, dat men met veel profijt kan lezen. Ik denk hierbij aan de mooie paragraphen over dimensieformules en dimensiecontrôle, en aan de herhaalde betoogen, hoe de proefnemingen, naarmate zij eene nauwkeurigere bevestiging der theorie leveren, aan theoretischen eenvoud verliezen. Maar dat neemt niet weg, dat ik dit hoofdstuk in zijn geheel als eene mislukking moet beschouwen, en niet bevordelijk aan het doel, het inzicht in de mechanica te verdiepen.

Teneinde misverstand te voorkomen wil ik nog uitdrukkelijk op den voorgrond brengen, dat mijn minder gunstig oordeel slechts betreft de grondslagen der dynamica in hoofdstuk I (en in de overige hoofdstukken enkele passages die hiermee samenhangen); verder, dat de aanstaande technicus er zich niets van behoeft aan te trekken, voor hem is het boek van Prof. Schuh waarschijnlijk wel in *alle* opzichten uitstekend. Ten slotte bestaat altijd nog de mogelijkheid, dat in het tweede stuk van deel II (b.v. in het hoofdstuk over den invloed der aswenteling van de aarde op de zwaartekracht; zie de noot op bladzijde 157) beschouwingen zullen verschijnen, die de hier aangewezen lacunes dempen.

J. H. S.

INGEKOMEN BOEKEN.

Prof. Dr. FRED. SCHUH, *Supplement 1930* op deel II van de vraagstukken over differentiaal- en integraalrekening en over analytische en beschrijvende meetkunde, in het bijzonder met het oog op het examen wiskunde K 5. Groningen, Noordhoff, 1931. Prijs . . . . *f* 0,75

H. G. A. VERKAART, *Antwoorden,* aanwijzingen en korte oplossingen bij de vraagstukken van het examen wiskunde L.O. 1891—1929. Groningen, Noordhoff, 1931. Prijs . . . . *f* 1,25

P. WIJDENES, *Planimetrie,* een eenvoudig schoolboek voor het eerste onderwijs in Vlakke Meetkunde met cell. driehoek, gradenboog en overzicht; 240 blz. 263 fig. geb. . . . . *f* 3,20
— (Een schoolboek voor M.U.L.O., H.B.S. 3-j. c., Handelsscholen, Seminaria, Kweekscholen, enz.).

P. WIJDENES, *Nieuw Rekenboek I,* geb. *f* 0,85; II, geb. *f* 1,—, III, geb. . . . . *f* 1,20
(Een schoolboek voor M.U.L.O. vooral; II en III mede voor H.B.S. in de 1e en 2e klas).

P. WIJDENES en Dr. D. DE LANGE, *Vlakke Meetkunde II,* 8e zorgvuldig nageziene druk met overzicht; 152 blz., 109 figuren; gec. . . . . *f* 2,25

P. WIJDENES, *Beknopte Algebra II,* 5e druk; gec. . . . *f* 1,70

Dr. B. GONGGRIJP, *Logarithmentafels* in 5 dec. Tafel D.; 5e druk, geb. . . . . *f* 2,50

Dr. P. MOLENBROEK—P. WIJDENES, *Stereometrie* voor het middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs. 3e zorgvuldig nageziene druk. 156 fig., 162 blz. gec. *f* 2,75
(§ 100 bevat schriftelijke staatsexamenopgaven, § 101 verslagen van mondelinge examens voor het staatsexamen).

P. WIJDENES, *Kleine Stereometrie,* geb. . . . . *f* 1,40

P. WIJDENES, *Leerboek der Goniometrie en Trigonometrie.* 4e druk, met formuleblad, 125 fig., 274 blz., geb. . . *f* 5,25